Révision 9 (algèbre linéaire)

Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (5x+y+6z, x+5y+6z, 6x+6y+12z) \end{cases}$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On note $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ et $e_3=(0,0,1)$ de sorte que $\mathscr{B}=(e_1,e_2,e_3)$.
   - $f(e_1)=f(1,0,0)=(5,1,6)=5e_1+1e_2+6e_3$
   - $f(e_2)=f(0,1,0)=(1,5,6)=1e_1+5e_2+6e_3$
   - $f(e_3)=f(0,0,1)=(6,6,12)=6e_1+6e_2+12e_3$

   Alors, $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$

2. - $\mathrm{rg}(A) \underset{C_3=C_1+C_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}=2$ (deux colonnes non colinéaires)
   - $\mathrm{rg}(A-4I_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} \underset{C_2=C_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}=2$ (deux colonnes non colinéaires)
   - $\mathrm{rg}(A-18I_3)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix} -13 & 1 & 6 \\ 1 & -13 & 6 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \underset{-2C_3=C_1+C_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & -13 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}=2$ (deux colonnes non colinéaires)

3. Soit $\lambda \in \{0,4,18\}$. D'après la question précédente, $\mathrm{rg}(A-\lambda I_3)=2$, d'après le théorème du rang matriciel $\dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda I_3))+\mathrm{rg}(A-\lambda I_3)=3$ (le nombre de colonnes de la matrice $A-\lambda I_3$). On en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda I_3))=1$, ainsi, pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_3)$ il suffit d'un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_3)$:
   - Pour $\lambda=0$, comme $1C_1+1C_2+(-1)C_3=0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$, donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
   - Pour $\lambda=4$, comme $1C_1+(-1)C_2+0C_3=0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-4I_3)$, donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A-4I_3)$.
   - Pour $\lambda=18$, comme $1C_1+1C_2+2C_3=0$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-18I_3)$, donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A-18I_3)$.

4. Ainsi, $\mathscr{B}'=((1,1,-1),(1,-1,0),(1,1,2))$. Soit $(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3$. Supposons $\alpha(1,1,-1)+\beta(1,-1,0)+\gamma(1,1,2)=0_{\mathbb{R}^3}$. On a alors $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha-\beta+\gamma &= 0 \\ -\alpha+2\gamma &= 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\iff} \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ -2\beta &= 0 \\ -\beta+\gamma &= 0 \end{cases} \iff \beta=\gamma=\alpha=0$. Ainsi, $\mathscr{B}'$ est une famille libre. De plus, $|\mathscr{B}'|=3=\dim(\mathbb{R}^3)$. Donc, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

5. Posons $e_1'=(1,1,-1)$, $e_2'=(1,-1,0)$ et $e_3'=(1,1,2)$, de sorte que $\mathscr{B}'=(e_1',e_2',e_3')$. Il s'agit donc de calculer l'image de ces vecteurs et de les décomposer dans $\mathscr{B}'$:
   - $f(1,1,-1)=(0,0,0)=0e_1'+0e_2'+0e_3'$
   - $f(1,-1,0)=(4,-4,0)=4e_2'=0e_1'+4e_2'+0e_3'$
   - $f(1,1,2)=(18,18,36)=18e_3'=0e_1'+0e_2'+18e_3'$

   Ainsi, $D=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}$.

6. $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Calculons P^{-1} en effectuant des opérations sur les lignes :

$$\begin{array}{ccc}
P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{smallmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L1 \end{smallmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} & L_2 \leftrightarrow L_3 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} & \begin{smallmatrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{smallmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & L_3 \leftarrow \dfrac{1}{6} L_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{smallmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{smallmatrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}
\end{array}$$

Dès lors, $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = P^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

7. D'après la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$, puis pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$. Pour $p = 0$, $A^p = I_3$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^p & 0 \\ 0 & 0 & 18^p \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3\times 4^p + 18^p & 18^p - 3\times 4^p & 2\times 18^p \\ 18^p - 3\times 4^p & 3\times 4^p + 18^p & 2\times 18^p \\ 2\times 18^p & 2\times 18^p & 4\times 18^p \end{pmatrix}$$

8. On pose $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{18} \end{pmatrix}$, alors $\Delta^2 = D$.

9. On pose alors $R = P\Delta P^{-1}$, alors $R^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

10. En alternant les signes, on pose alors :

$$R_1 = R \qquad R_2 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1} \qquad R_3 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1} \qquad R_4 = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$$

Alors pour tout $i \in [\![1 ; 4]\!]$, ${R_i}^2 = A$.

11. (a) Proposons deux méthodes [1] :

- Soit $(M, N) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})^2$. Pour tout $k \in [\![1 ; 3]\!]$, $(MN)_{k,k} = \sum_{i=1}^{3} M_{k,i}N_{i,k}$, ainsi,

$$\operatorname{tr}(MN) = \sum_{k=1}^{3} (MN)_{k,k} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} M_{k,i}N_{i,k}$$

De même, pour tout $i \in [\![1 ; 3]\!]$, $(NM)_{i,i} = \sum_{k=1}^{3} N_{i,k}M_{k,i}$, donc

$$\operatorname{tr}(NM) = \sum_{i=1}^{3} (NM)_{i,i} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} N_{i,k}M_{k,i} = \sum_{k=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} M_{k,i}N_{i,k} = \operatorname{tr}(MN)$$

1. Qui reviennent en fait au même mais la première se généralise pour des matrices carrée de taille n tandis que l'autre est plus concrète mais est limitée aux matrices de taille 3.

- Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors :

$$\begin{array}{rcl} MN & = & \begin{pmatrix} aa'+bd'+cg' & \star & \star \\ \star & db'+ee'+fh' & \star \\ \star & \star & gc'+hf'+ii' \end{pmatrix} \\ \mathrm{tr}(MN) & = & (aa'+bd'+cg')+(db'+ee'+fh')+(gc'+hf'+ii') \\ NM & = & \begin{pmatrix} a'a+b'd+c'g & \star & \star \\ \star & d'b+e'e+f'h & \star \\ \star & \star & g'c+h'f+i'i \end{pmatrix} \\ \mathrm{tr}(NM) & = & (a'a+b'd+c'g)+(d'b+e'e+f'h)+(g'c+h'f+i'i) \end{array}$$

Ainsi, $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$

(b) Si B et B' sont semblables, cela veut dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $B = PB'P^{-1}$, alors

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P(B'P^{-1})) = \mathrm{tr}((B'P^{-1})P) = \mathrm{tr}(BI_3) = \mathrm{tr}(B)$$

(c) Comme, par définition, chaque matrice R_i est semblable à une matrice diagonale, d'après la question précédente, sa trace est égale à la trace de la matrice diagonale en question, ainsi, $\mathrm{tr}(R_1) = 2 + 3\sqrt{2}$, $\mathrm{tr}(R_2) = -2 - 3\sqrt{2}$, $\mathrm{tr}(R_3) = 2 - 3\sqrt{2}$ et $\mathrm{tr}(R_4) = 3\sqrt{2} - 2$. Ainsi,

$$\mathrm{tr}(R_2) < \mathrm{tr}(R_3) < 0 < \mathrm{tr}(R_4) < \mathrm{tr}(R_1)$$

comme les traces de ces matrices sont deux à deux distinctes, on peut en déduire que les matrices R_1, R_2, R_3 et R_4 sont deux à deux différentes.

Remarque 1. Il y a donc au moins quatre racines carrées de A, mais attention à ne pas aller trop vite, peut-être qu'il y en a d'autres. Rien ne nous dit, *a priori*, qu'on ne peut pas en construire une qui ne soit pas de la forme $P\tilde{\Delta}P^{-1}$ où $\tilde{\Delta}$ est une matrice diagonale.

(d) $\Delta^2 = P^{-1}RP \times P^{-1}RP = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = D$

(e) $\Delta \times D = D^2 \times D = D^3$, tandis que $D \times \Delta = D \times D^2 = D^3$, ainsi $\Delta D = D\Delta$. Ainsi, Δ et D commutent.

(f) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors $MD = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 3\sqrt{2}c \\ 0 & 2e & 3\sqrt{2}f \\ 0 & 2h & 3\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ et $DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2d & 2e & 2f \\ 3\sqrt{2}g & 3\sqrt{2}h & 3\sqrt{2}i \end{pmatrix}$, ainsi :

$$M \in C(D) \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & = & 0 \\ 2b & = & 0 \\ 3\sqrt{2}c & = & 0 \\ 0 & = & 2d \\ 2e & = & 2e \\ 3\sqrt{2}f & = & 2f \\ 0 & = & 3\sqrt{2}g \\ 2h & = & 3\sqrt{2}h \\ 3\sqrt{2}i & = & 3\sqrt{2}i \end{array} \right. \iff b = c = d = f = g = h = 0 \iff M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$\iff M = aE_{1,1} + eE_{2,2} + iE_{3,3} \iff M \in \mathrm{vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$$

On en déduit que $C(D) = \mathrm{vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$, ainsi $C(D)$ est un espace vectoriel, dont $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une famille génératrice. De plus, cette famille est libre (sous-famille de la base canonique donc libre). Ainsi, $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une base de $C(D)$. On en déduit que $\dim(C(D)) = 3$.

(g) Comme $\Delta \in C(D)$ (question 11e), on en déduit qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\Delta = aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

De surcroît, $\Delta^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = D$, par identification, $a^0 = 0$, $b^2 = 2$, $c^2 = 18$, ainsi $a = 0$, $b = \pm\sqrt{2}$, $c = \pm 3\sqrt{2}$. Ceci montre que $R = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 3\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$. On a donc montré que si R était une racine carrée de A, alors $R \in \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$. Comme ces quatre matrices sont bien des racines carrées de A et qu'elles sont bien deux à deux distinctes, on en déduit que l'ensemble des matrices carrées de A est $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$. La matrice A admet donc exactement 4 racines carrées.

Remarque 2.

- Attention, cela ne se généralise pas si facilement, par exemple la matrice nulle admet une infinité de racines carrées, par exemple, $\lambda E_{1,2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- De même, $C(I_n)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec l'identité, n'est pas constituée uniquement de matrices diagonales, contrairement à $C(D)$, car $C(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- En revanche, si $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale, dont les coefficients sont deux à deux différents, on peut démontrer que $C(D)$ est constituée de l'ensemble des matrices diagonales, c'est assez classique, on prend une matrice M quelconque, on calcule les coefficients de MD et de DM et on voit à quelle condition $MD = DM$ (exercice 21 du TD8).