Révision 9 (complexes, polynômes, sommes, produits)

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{n}}$ où i est un nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

1. Donner l'expression des racines n-ièmes de 1 à l'aide de ω.
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
3. Soit $k \in [\![0\,; n-1]\!]$. Déterminer $r \in [\![0\,; n-1]\!]$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$.
4. Calculer $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

On considère le polynôme $P = \sum\limits_{k=1}^{n} kX^{k-1}$.

5. Montrer que, pour tout réel x différent de 1, $P(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$

   On pourra introduire le polynôme $Q = \sum\limits_{k=1}^{n} X^k$.
6. En déduire que les polynômes $(X-1)^2 P(X)$ et $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ sont égaux.
7. Montrer que, pour tout $k \in [\![1\,; n-1]\!]$, $P\left(\omega^k\right) = \dfrac{n}{\omega^k - 1}$.
8. En factorisant $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \left(1 - \omega^k\right) = n$.