Exercice : soyez sans limite en analyse asymptotique

1. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}} = (1+\sin(x))^{-1/2}$. Posons $u = \sin(x)$, alors :
   - $u = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$
   - $u^2 = x^2 + o(x^3)$
   - $u^3 = x^3 + o(x^3)$
   - Comme $u^3 \sim x^3$, $o(u^3) = o(x^3)$.

   Appliquons alors le $DL_3(0)$ de $(1+u)^{-\frac{1}{2}}$:
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+\sin(x)}} &= (1+u)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{5}{16}u^3 + o(u^3)\\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \frac{3}{8}\left(x^2 + o(x^3)\right) - \frac{5}{16}\left(x^3 + o(x^3)\right) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{11}{48}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors, $u = 1/x^2 \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$
$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\sqrt{1+x^{-2}} + \sqrt{1-x^{-2}}\right) = x\left(\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u}\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2) + 1 - \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}(-u)^2 + o(u^2)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{=} x\left(1 + \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{8}x^{-4} + 1 - \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{8}x^{-4} + o(x^{-4})\right) = 2x - \frac{1}{4}x^{-3} + o(x^{-3})\end{aligned}$$
   Ainsi, $x \mapsto 2x$ est une asymptote de f en $+\infty$. De plus, $f(x) - 2x \sim -\dfrac{1}{4x^3}$, comme deux fonctions équivalentes en $+\infty$ ont même signe au voisinage de $+\infty$, on en déduit que f est en dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$, de même
$$f(x) = -x\left(\sqrt{1+x^{-2}} + \sqrt{1-x^{-2}}\right) \underset{x\to-\infty}{=} -x\left(1 + \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{8}x^{-4} + 1 - \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{8}x^{-4} + o(x^{-4})\right) = -2x + \frac{1}{4}x^{-3} + o(x^{-3})$$
   Ainsi, $x \mapsto -2x$ est une asymptote de f en $-\infty$ et f est en dessous de son asymptote au voisinage de $-\infty$.

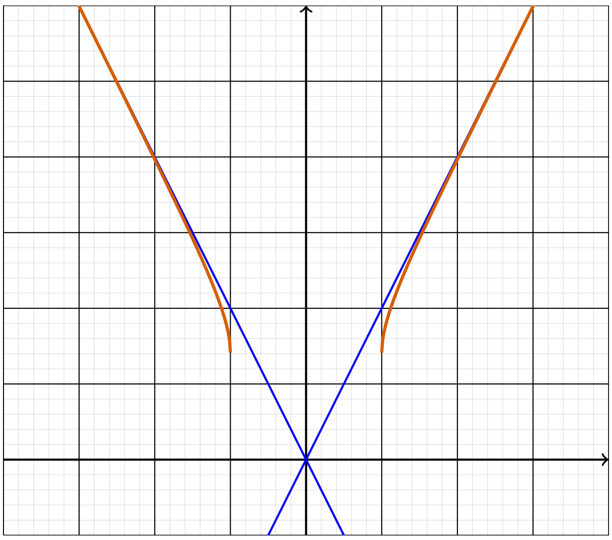

FIGURE 1 – Le tracé de f avec ses asymptotes.

3. Soit un entier $n \geqslant 3$,
$$\begin{aligned} u_n = \left(\frac{n}{n-5/2}\right)^n &= \exp\left(n\ln\left(\frac{n}{n-5/2}\right)\right) = \exp\left(-n\ln\left(1 - \frac{5}{2n}\right)\right)\\ &= \exp\left(-n\left(-\frac{5}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(\frac{5}{2} + o(1)\right)\end{aligned}$$
   Or, $\dfrac{5}{2} + o(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par continuité de l'exponentielle en $\dfrac{5}{2}$, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left(\dfrac{5}{2}\right)$.

4. Appliquons la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 en $\dfrac{\pi}{3}$:
   - $\tan\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$
   - $\tan' : x \mapsto 1+\tan^2(x)$, $\tan'(\pi/3) = 4$
   - $\tan'' : x \mapsto 2\tan(x)\tan'(x)$, $\tan''(\pi/3) = 8\sqrt{3}$

   Alors comme tan est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]\,0\,;\pi/2\,[$,

$$\begin{aligned}\tan(x) &\underset{x\to\pi/3}{=} \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + \tan'\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{\tan''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)\\ &\underset{x\to\pi/3}{=} \sqrt{3} + 4\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + 4\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)\end{aligned}$$

   Ainsi :

$$\begin{aligned}\sqrt{\tan(x)} &\underset{x\to\pi/3}{=} \sqrt{\sqrt{3} + 4\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + 4\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)}\\ &\underset{x\to\pi/3}{=} \sqrt{\sqrt{3}}\sqrt{1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + 4\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)}\end{aligned}$$

   - On pose $u = \dfrac{4}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) + 4\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$, $u \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{3}]{} 0$.
   - $u^2 = \dfrac{16}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$,
   - Comme $u^2 \sim \dfrac{16}{3}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2$, $o(u^2) = o\left(\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$.

   On peut alors appliquer le développement de $\sqrt{1+u}$ en 0 à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned}\sqrt{\tan(x)} &= 3^{\frac{1}{4}}\left(1+\frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o(u^2)\right) = 3^{\frac{1}{4}}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + 2\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)\right)\\ &= 3^{\frac{1}{4}} + \frac{2}{3^{\frac{1}{4}}}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{4\times 3^{\frac{1}{4}}}{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2\right)\end{aligned}$$

   On peut en conclure que $x \mapsto 3^{\frac{1}{4}} + \dfrac{2}{3^{\frac{1}{4}}}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ est tangente en $x \mapsto \sqrt{\tan(x)}$ en $\pi/3$, et que f est au dessus de sa tangente en $\pi/3$ au moins sur un voisinage de $\pi/3$ [1].

Problème : les noyaux grandissent jusqu'à atteindre l'âge adulte

Pour $P \in E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $g(P) = (P(0) - P'(0))(1+X) + P''(0)X^2 + P'''(0)(X^2+X^3)$.

1. Soient $(P,Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}g(\lambda P + Q) &= \left[(\lambda P+Q)(0) - (\lambda P+Q)'(0)\right](1+X) + \left[(\lambda P+Q)''(0)\right]X^2 + \left[(\lambda P+Q)'''(0)\right](X^2+X^3)\\ &= \left[\lambda P(0) + Q(0) - \lambda P'(0) - Q'(0)\right](1+X) + \left[\lambda P''(0) + Q''(0)\right]X^2 + \left[\lambda P'''(0) + Q'''(0)\right](X^2+X^3)\\ &= \lambda\left[(P(0)-P'(0))(1+X) + P''(0)X^2 + P'''(0)(X^2+X^3)\right]\\ &\qquad + (Q(0)-Q'(0))(1+X) + Q''(0)X^2 + Q'''(0)(X^2+X^3)\\ &= \lambda g(P) + g(Q)\end{aligned}$$

   Ainsi, g est linéaire, de plus, $g(P) \in \mathrm{vect}(1, X, X^2, X^3) = E$ ainsi, $g \in \mathscr{L}(E)$.
2. Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E, alors
   - $g(1) = 1 + X = 1\times 1 + 1\times X + 0\times X^2 + 0\times X^3$,
   - $g(X) = -1 - X = -1\times 1 + -1\times X + 0\times X^2 + 0\times X^3$,
   - $g(X^2) = 2X^2 = 0\times 1 + 0\times X + 2X^2 + 0X^3$
   - $g(X^3) = 6X^2 + 6X^3 = 0\times 1 + 0\times X + 6\times X^2 + 6\times X^3$.

   Ainsi,

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

1. Ce qu'on aurait pu directement dire car tan est convexe sur $]\,0\,;\pi/2\,[$ et $\sqrt{\ }$ est convexe et croissante, donc $\sqrt{\tan}$ est convexe sur $]\,0\,;\pi/2\,[$, et donc au-dessus de chacune de ses tangentes.

3. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E$. Posons

$$\begin{array}{rcl} Q & = & g(P) = (P(0) - P'(0))(1+X) + P''(0)X^2 + P'''(0)(X^2+X^3) \\ & = & (a-b)(1+X) + 2cX^2 + 6d(X^2+X^3) \end{array}$$

Alors

$$\begin{array}{rcl} g\circ g(P) & = & g(g(P)) = g(Q) = g((a-b)(1+X) + 2cX^2 + 6d(X^2+X^3)) \\ & = & (a-b)g(1) + (a-b)g(X) + 2cg(X^2) + 6dg(X^2) + 6dg(X^3) \\ & = & (a-b)(1+X) + (a-b)(-1-X) + 4cX^2 + 12dX^2 + 36dX^2 + 36dX^3 \\ & = & (4c+48d)X^2 + 36dX^3 \end{array}$$

En calculant les images des vecteurs de la base canonique par $g\circ g$, on obtient
- $g\circ g(1) = 0 = 0\times 1 + 0\times X + 0X^2 + 0X^3$
- $g\circ g(X) = 0 = 0\times 1 + 0\times X + 0\times X^2 + 0\times X^3$
- $g\circ g(X^2) = 4X^2 = 4X^2$
- $g\circ g(X^3) = 6X^2 + 6\times 6(X^2+X^3) = 0\times 1 + 0\times X + 6\times X^2 + 48\times X^3$.

Ainsi,

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g\circ g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 48 \\ 0 & 0 & 0 & 36 \end{pmatrix}$$

On aurait aussi pu constater que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g\circ g) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)\times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = A^2$ et calculer A^2.

4. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E$, alors :

$$\begin{array}{rllll} P\in \mathrm{Ker}(g) & \Longleftrightarrow & g(P) = 0 & \Longleftrightarrow & (a-b)\times 1 + (a-b)\times X + (2c+6d)X^2 + 6dX^3 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} a-b & = & 0 \\ a-b & = & 0 \\ 2c+6d & = & 0 \\ 6d & = & 0 \end{array}\right. & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} b & = & a \\ d & = & 0 \\ c & = & -3d = 0 \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad P = a + aX \\ & \Longleftrightarrow & P = a(1+X) & \Longleftrightarrow & P\in \mathrm{vect}(1+X) \end{array}$$

Dès lors, $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{vect}(1+X)$ Comme $1+X$ n'est pas le polynôme nul, $(1+X)$ est une famille libre comme elle est génératrice de $\mathrm{Ker}(g)$, c'est une base de $\mathrm{Ker}(g)$.
Comme $(1, X, X^2, X^3)$ est la base canonique de E, on sait que

$$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{vect}((g(1), g(X), g(X^2), g(X^3)) = \mathrm{vect}(1+X, 1+X, 2X^2, 6X^2+6X^3) = \mathrm{vect}(1+X, 2X^2, 6X^2+6X^3)$$

Dès lors, $(1+X, 2X^2, 6X^2+6X^3)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(g)$. Elle est libre car constituée de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts. Ainsi, $(1+X, 2X^2, 6X^2+6X^3)$ est une base de $\mathrm{Im}(g)$. On constate que $1+X\in \mathrm{Im}(g)\cap \mathrm{Ker}(g)$. Dès lors, $\mathrm{Im}(g)$ et $\mathrm{Ker}(g)$ ne sont pas supplémentaires dans[2] E.

5. Soit $P = a + bX + cX^2 + dX^3 \in E$, alors :

$$\begin{array}{rllll} P\in \mathrm{Ker}(g^2) & \Longleftrightarrow & g^2(P) = 0 & \Longleftrightarrow & (4c+48d)X^2 + 36dX^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 4c+48d & = & 0 \\ 36d & = & 0 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} d & = & 0 \\ c & = & -12d = 0 \end{array}\right. & \Longleftrightarrow & P = a + bX \quad \Longleftrightarrow P\in \mathrm{vect}(1, X) \end{array}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(g^2) = \mathrm{vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$. Ainsi, $(1, X)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_1[X] = \mathrm{Ker}(g^2)$. De plus,

$$\mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{vect}(g^2(1), g^2(X), g^2(X^2), g^3(X^3)) = \mathrm{vect}(0, 0, 4X^2, 48X^2+36X^3) = \mathrm{vect}(4X^2, 48X^2+36X^3)$$

La famille $(4X^2, 48X^2+36X^3)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(g)$ et est libre (famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts), donc est une base[3] de $\mathrm{Im}(g^2)$.
Soit $P\in \mathrm{Ker}(g^2)\cap \mathrm{Im}(g^2)$, alors il existe $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $P = a + bX$ et il existe $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ tel que $P = c4X^2 + d(48X^2+36X^3)$. Ainsi, $a + bX = c4X^2 + d(48X^2+36X^3)$. Par unicité de l'écriture d'un polynôme, il vient que $a = b = c = d = 0$. Dès lors, $P = 0$, $\mathrm{Ker}(g^2)\cap \mathrm{Im}(g^2)\subset \{0\}$, l'inclusion réciproque étant vraie, on a que $\mathrm{Ker}(g^2)\oplus \mathrm{Im}(g^2)$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(g^2)) + \dim(\mathrm{Im}(g^2))$. Ceci prouve que $E = \mathrm{Ker}(g^2)\oplus \mathrm{Im}(g^2)$.

2. Bien que $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Im}(g))$ d'après le théorème du rang.
3. On remarque que $\mathrm{Im}(g^2)\subset \mathrm{vect}(X^2, X^3)$, et par égalité des dimensions, $\mathrm{Im}(g^2) = \mathrm{vect}(X^2, X^3)$, ainsi (X^2, X^3) est une base de $\mathrm{Im}(g^2)$ mais plus sympa que celle donnée.

6. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$, alors $cX + d \in \text{vect}(1, X) \in \text{Ker}(g^2)$, de plus

$$aX^3 + bX^2 = \frac{a}{36}\left(36X^3 + 48X^2\right) + \left(\frac{b}{4} - \frac{a}{3}\right) 4X^2 \in \text{vect}(36X^3 + 48X^2, 4X^2) \in \text{Im}(g^2)$$

Notons p la projection sur $\text{Ker}(g^2)$ parallèlement à $\text{Im}(g^2)$, $p(P) = cX + d = P'(0)X + P(0)$, ainsi

$$p\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ \quad P \quad \longmapsto P(0) + XP'(0) \end{cases}$$

7. Soit $x \in \text{Ker}(f^i)$. Alors $f^i(x) = 0_E$, en appliquant f à cette égalité [4], il s'ensuit que

$$f(f^i(x)) = f(0_E) = 0_E$$

Ainsi, $f^{i+1}(x) = 0_E$, prouvant que $x \in \text{Ker}(f^{i+1})$. On a ainsi montré que $\text{Ker}(f^i) \subset \text{Ker}(f^{i+1})$.
Soit $y \in \text{Im}(f^{i+1})$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{i+1}(x)$ Donc, $y = f^i(f(x))$. Posons alors $x' = f(x) \in E$, on obtient $y = f^i(x') \in \text{Im}(f^i)$. Par conséquent, $\text{Im}(f^{i+1}) \subset \text{Im}(f^i)$.

8. Soit un entier $i \geqslant r$. D'après la question précédente, $\text{Ker}(f^i) \subset \text{Ker}(f^{i+1})$.
Montrons l'inclusion réciproque. Posons $a = i - r \in \mathbb{N}$, de sorte que $i = r + a$. Soit $x \in \text{Ker}(f^{i+1})$, alors, $f^{a+r+1}(x) = 0_E$, donc $f^{r+1}(f^a(x)) = 0_E$. Dès lors, $f^a(x) \in \text{Ker}(f^{r+1}) = \text{Ker}(f^r)$. Par conséquent, $f^r(f^a(x)) = 0_E$. Par suite, $f^{r+a}(x) = 0_E$, ainsi $x \in \text{Ker}(f^i)$. On a montré que $\text{Ker}(f^{i+1}) \subset \text{Ker}(f^i)$.
Par double inclusion, on conclut que $\text{Ker}(f^{i+1}) = \text{Ker}(f^i)$.

Ainsi, pour tout $i \geqslant r$, $\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^r)$. [5]

9. Soit un entier $k \geqslant r$, alors montrons que $\text{Im}(f^k) \subset \text{Im}(f^r)$, en effet soit $y \in \text{Im}(f^k)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f^k(x) = f^r(f^{k-r}(x)) \in \text{Im}(f^r)$.
De plus, d'après le théorème du rang appliqué à f^r et à f^k :

$$\dim(\text{Im}(f^k)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f^k)) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f^r)) = \dim(\text{Im}(f^r))$$

Par une inclusion et égalité des dimensions, on en déduit que pour tout entier $k \geqslant r$, $\text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^r)$.

10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Considérons $\varepsilon = 1/3 > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant 1/3$. Ainsi, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n \in [\,\ell - 1/3\,;\ell + 1/3\,]$. Or, $[\,\ell - 1/3\,;\ell + 1/3\,]$ est un intervalle de longueur $2/3$, il contient donc au plus un entier, donc pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $m \geqslant n_0$, $u_n = u_m$. La suite $(u_n)_n$ est ainsi stationnaire [6].

11. Posons $d_k = \dim(\text{Ker}(f^i))$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme $\text{Ker}(f^i) \subset \text{Ker}(f^{i+1}) \subset E$, donc $d_i \leqslant d_{i+1} \leqslant n$. La suite $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc une suite croissante et majorée. D'après le théorème de la limite monotone, $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. Comme c'est une suite d'entiers, d'après la question précédente, la suite est stationnaire. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $d_n = d_{n_0}$. En particulier $d_{n_0+1} = d_{n_0}$. Dès lors, $\text{Ker}(f^{n_0})$ et $\text{Ker}(f^{n_0+1})$ ont même dimension et $\text{Ker}(f^{n_0}) \subset \text{Ker}(f^{n_0+1})$. Ainsi, $\text{Ker}(f^{n_0}) = \text{Ker}(f^{n_0+1})$.

Remarque 1. les noyaux de f sont emboîtés les uns dans les autres (à la manière des poupées russes), les inclusions sont strictes, jusqu'à $\text{Ker}(f^p) = E$ où la suite va stationner à E. On grandit strictement jusqu'à ce qu'on s'arrête brusquement de grandir.

12. Soit $x \in \text{Ker}(f^r) \cap \text{Im}(f^r)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f^r(y)$.
Ainsi,

$$f^r(x) = f^r(f^r(y)) = f^{2r}(y) = 0_E$$

Ainsi, $y \in \text{Ker}(f^{2r}) = \text{Ker}(f^r)$. Ainsi, $x = f^r(y) = 0_E$. Dès lors $\text{Ker}(f^r) \cap \text{Im}(f^r) \subset \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on a $\text{Ker}(f^r) \oplus \text{Im}(f^r)$. De plus, par le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme f^r, $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f^r)) + \dim(\text{Im}(f^r))$. Ainsi, $E = \text{Ker}(f^r) \oplus \text{Im}(f^r)$.

13. Si $x \in \text{Ker}(f^r)$, alors $f^r(f(x)) = f^{r+1}(x) = f(f^r(x)) = f(0_E) = 0_E$, ceci montre que $f(x) \in \ker(f^r)$, ainsi $f_{\text{Ker}(f^r)}$ est bien définie. Par restriction, $f_{\text{Ker}(f^r)}\colon \text{Ker}(f^r) \to \text{Ker}(f^r)$ est bien linéaire.
Soit $x \in \text{Ker}(f^r)$, $(f_{\text{Ker}(f^r)})^r(x) = f^r(x) = 0_E$. Ceci montre que $f^r_{\text{Ker}(f^r)} = 0$, ainsi $f_{\text{Ker}(f^r)}$ est nilpotente et son ordre de nilpotence est inférieure ou égale à r. Soit $p < r$, alors $\text{Ker}(f^p)$ est strictement inclus dans $\text{Ker}(f^r)$, ainsi il existe $x \in \ker(f^r) \backslash \text{Ker}(f^p)$, en particulier, $f^p(x) \neq 0$, donc $f_{\text{Ker}(f^r)}(x) \neq 0$, ainsi l'ordre de nilpotence est exactement r.

4. Attention ce n'est pas équivalent, si $a = b$ alors $f(a) = f(b)$, mais la réciproque est fausse (sauf si la fonction est injective).
5. On ne demandait pas de démontrer ce résultat qui se démontre par une récurrence facile : posons $\mathscr{P}(i)$: «$\text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^r)$», $\mathscr{P}(r)$ est vérifiée. Supposons $\mathscr{P}(i)$ vraie, alors $\text{Ker}(f^{i+1}) = \text{Ker}(f^i) = \text{Ker}(f^r)$, donc $\mathscr{P}(i+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $i \geqslant r$, $\mathscr{P}(i)$ est vraie.
6. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} u_{n_0}$, par unicité de la limite $\ell = u_{n_0} \in \mathbb{Z}$.

14. Soit $x \in \mathrm{Im}(f^r)$, alors il existe $z \in E$, tel que $x = f^r(y)$, alors $f(x) = f(f(^r(y)) = f^r(f(y)) \in \mathrm{Im}(f^r)$, ainsi $f_{\mathrm{Im}(f^r)}$ est bien définie, elle est linéaire par restriction.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(f_{\mathrm{Im}(f^r)})$, alors $f(x) = 0$, en particulier $f^r(x) = 0_E$, et $x \in \mathrm{Im}(f^r(x))$, ainsi $x \in \mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0_E\}$, ainsi $x = 0_E$, ainsi $f_{\mathrm{Im}(f^r)}$ est injective, comme c'est un endomorphisme en dimension finie, $f_{\mathrm{Im}(f^r)}$ est alors un isomorphisme.
15. Comme f^{p-1} n'est pas la fonction nulle, il existe $x \in E$, $f^{p-1}(x) \neq 0$. Soit $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$. Supposons que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0_E \tag{1}$$

Présentons trois rédactions différente de la preuve que les $\lambda_i = 0$:
- En composant par f^{p-1} l'équation (1), on a

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^{i+p-1}(x) = \lambda_0 f^{p-1}(x) + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f^{i+p-1}(x) = 0_E$$

Or pour tout $i \in [\![1\,; p-1]\!]$, $i - 1 \geqslant 0$ et donc $f^{i+p-1} = f^p \circ f^{i-1} = 0_{\mathscr{L}}(E) \circ f^{i-1} = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on obtient donc $\lambda_0 f^{p-1}(x) + 0_E = 0_E$ et comme le vecteur $f^{p-1}(x)$ n'est pas nul, on en déduit que c'est le scalaire λ_0 qui vaut 0[7], puis on recommence en composant cette fois-ci par f^{p-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$ puis etc.[8]
- Effectuons une récurrence, posons, pour $k \in [\![0\,; p-1]\!]$

$$\mathscr{P}(k) : \qquad \text{«}\forall q \in [\![0\,; k]\!] \quad \lambda_q = 0\text{»}$$

— **Initialisation :** on a montré que $\lambda_0 = 0$ dans la première méthode, ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
— **Hérédité :** soit $k \in [\![0\,; p-2]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(k+1)$ vraie. Comme $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$, on a $\sum\limits_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0_E$. En composant par f^{p-k-2}, on a

$$\sum_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i f^{p-k-2+i}(x) = \lambda_{k+1} f^{p-1}(x) + \sum_{i=k+2}^{p-1} \lambda_i f^{p-k-2+i}(x)$$

Or pour tout $i \in [\![k+2\,; p-1]\!]$, $i - k - 2 \geqslant 0$, ainsi $f^{p-k-2+i}(x) = 0_E$. Donc $\lambda_{k+1} f^{p-1}(x) = 0_E$, comme $f^{p-1}(x) \neq 0_E$, $\lambda_{k+1} = 0$. Pour tout $q \in [\![0\,; k+1]\!]$, $\lambda_q = 0$, ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifié.
— **Conclusion :** pour tout $k \in [\![0\,; p-1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
Ainsi, comme $\mathscr{P}(p-1)$ est vraie, on a pour tout $k \in [\![0\,; p-1]\!]$, $\lambda_k = 0$. On a ainsi montré que la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre.
- Supposons que l'un des λ_i soit non nul, posons $i_0 = \min\{i \in [\![0\,; p-1]\!], \lambda_i \neq 0\}$. Ainsi pour tout $i \in [\![0\,; i_0 - 1]\!]$, $\lambda_i = 0$. On a donc

$$\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0_E$$

Et comme à la méthode par récurrence, en composant par f^{p-i_0-1}, on prouve que $\lambda_{i_0} = 0$ ce qui est absurde. Ainsi il n'est pas possible de trouver un λ_i non nul. Donc la famille est libre.

D'après le cours, le cardinal de toute famille de E est majorée par $\dim(E)$, ainsi $p \leqslant n$.
16. Si $p = n$, alors $\mathscr{F} = (x, f(x), f^2(x), ..., f^{n-2}(x), f^{n-1}(x))$ est une famille libre de cardinal $n = \dim(E)$, c'est donc une base de E. De plus, calculons l'image de chacun de ces vecteurs :
- $f(x) = 0 \times x + 1 \times f(x) + 0 \times f^2(x) + \ldots + 0 \times f^{n-1}(x)$
- $f(f(x)) = 0 \times x + 0 \times f(x) + 1 \times f^2(x) + \ldots + 0 \times f^{n-1}(x)$

$\vdots$
- $f(f^{n-2}(x)) = f^{n-1}(x) = 0 \times x + 0 \times f(x) + \ldots + 0 \times f^{n-2}(x) + 1 \times f^{n-1}(x)$
- $f(f^{n-1}(x)) = f^n(x) = 0_E = 0 \times x + 0 \times f(x) + \ldots + 0 \times f^{n-2}(x) + 0 \times f^{n-1}(x)$

On obtient donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{F}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \ddots & (0) & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & (0) & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Rappelons que si $\lambda u = 0_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$, alors $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$. Par contre si A et B sont deux matrices telles que $AB = 0$, ON NE PEUT PAS DIRE/ÉCRIRE $A = 0$ OU $B = 0$ SOUS PEINE D'AVOIR DE GROS ENNUIS.
8. Court mais pas très rigoureux, le etc. cache une récurrence que l'on a la flemme de faire.

17. On a que $f^p = 0$, ainsi $f^{p+1} = 0$, donc $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$. En notant i_0 l'indice de Fitting, c'est-à-dire le plus petit indice $i \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i+1})$. On peut en conclure que $i_0 \leqslant p$. Supposons $i_0 < p$, donc que $i_0 \leqslant p-1$. Alors, d'après la question 8 pour tout $i \geqslant i_0$, $\mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Ker}(f^{i_0})$., on a donc $\mathrm{Ker}(f^{i_0}) = \mathrm{Ker}(f^p) = E$. Ainsi, $x \in \mathrm{Ker}(f^{i_0})$, donc $f^{i_0}(x) = 0$, or $f^{i_0}(x)$ est un vecteur de la famille libre $\mathscr{F} = (x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ donc est non nul. Ceci est absurde, donc $i_0 \geqslant p$. Dès lors, l'indice de Fitting de f est p.

18. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$, posons alors

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \frac{i!}{(i+k)!} a_i X^{i+k} \in \mathbb{K}[X]$$

alors $D^k(Q) = P$, ainsi D^k est surjective et $\mathrm{Im}(D^k) = \mathbb{K}[X]$.

Soit $P = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathrm{Ker}(D^k)$, alors

$$P \in \mathrm{Ker}(D^k) \quad \Longleftrightarrow \quad D^k(P) = P^{(k)} = \sum_{i=k}^{n} a_i \frac{i!}{(i-k)!} X^{i-k} = 0$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, $P \in \mathrm{Ker}(D^k)$ ssi pour tout $i \in [\![k\,;n]\!]$, $a_i = 0$, ssi $P = \sum\limits_{i=0}^{k-1} a_i X_i \in \mathbb{K}_{k-1}[X]$. Ainsi, par équivalence, $\mathrm{Ker}(f^k) = \mathbb{K}_{k-1}[X]$ (si $k = 0$, par convention, $\mathbb{K}_{k-1}[X] = \{0\}$)

19. Soit $k \in \mathbb{N}$, comme $X^k \in \mathbb{K}_k[X] \backslash \mathbb{K}_{k-1}[X]$, on en déduit que $X^k \in \mathrm{Ker}(D^{k+1})$ mais $X^k \notin \mathrm{Ker}(D^k)$, ainsi $\mathrm{Ker}(D^k) \neq \mathrm{Ker}(D^{k+1})$.

Remarque 2. Ici, la suite de noyaux continue de grandir strictement sans jamais s'arrêter contrairement à ce que l'on a démontré en dimension finie. De là, à dire que les noyaux sont d'éternels enfants...