Correction de l'exercice 1.

1. 0 $\quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2 + C_1)$
2. 0 $\quad (C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1)$
3. $a(d-c)(c-b)(b-a)$ $\quad (C_4 \leftarrow C_4 - C_3)$
4. 0 $\quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2 - (a+b+c)L_1)$
5. $(c-b)(b-a)(c-a)$, $\quad (C_3 \leftarrow C_3 - C_2$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_1)$

Correction de l'exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ 2x+3 & 3x+4 & 4x+5 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+7 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} \begin{vmatrix} x+2 & 2x+3 & 3x+4 \\ x+1 & x+1 & x+1 \\ 3x+5 & 5x+8 & 10x+7 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} x+2 & x+1 & 2x+2 \\ x+1 & 0 & 0 \\ 3x+5 & 2x+3 & 7x+2 \end{vmatrix}$$

On développe alors sur la deuxième ligne, ainsi

$$P(x) = (-1)^{1+2}(x+1) \begin{vmatrix} x+1 & 2x+2 \\ 2x+3 & 7x+2 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1}{=} -(x+1) \begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 2x+3 & 3x-4 \end{vmatrix} = -(x+1)^2(3x-4)$$

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4. Si θ n'est pas un multiple de $k\pi$, $D_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$. Si $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors $D_n = (n+1)(-1)^k$.

Correction de l'exercice 5. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/GjmkkFCskAA

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

$$\det(A_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n \end{vmatrix} \underset{C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \end{vmatrix} = \det(A_{n-1})$$

Ainsi, $(\det(A_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite constante, or $A_1 = (1)$ donc $\det(A_1) = 1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\det(A_n) = 1$

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/TuNMVQi3nYk

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13. Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$».

- **Initialisation :** si $n = 1$, alors $V(a_1) = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1$. De plus, par convention, un produit vide vaut 1, ainsi $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 1} (a_j - a_i) = 1$, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie. [1]
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ [2], supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Alors, distinguons les cas :
  — S'il existe $(k, \ell) \in [\![1 ; n+1]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, tel que $a_k = a_\ell$, alors la k-ième ligne et la ℓ-ième ligne sont égales et donc comme le déterminant est alternée en les lignes, $V(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = 0$, tout comme $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i)$ (un terme nul dont le produit), la formule à démontrer est donc vraie dans ce cas.
  — Si les a_k sont deux à deux distincts. Étudions

$$f \colon x \mapsto V(a_1, a_2, \dots, a_n, x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^n \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{vmatrix}_{n+1}$$

  Développons par rapport à la $n+1$-ième ligne, alors $f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} x^{j-1} \Delta_{n+1,j}$, où $\Delta_{n+1,j}$ est le mineur d'indice $(n+1, j)$. Remarquons, que $\Delta_{n+1,j}$ est une constante (ne dépend pas de x), ainsi f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n. De plus, le coefficient devant x^n vaut $(-1)^{n+1+n+1} \Delta_{n+1,n+1} = V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \neq 0$ (produit de nombres non nuls). Ainsi, f est de degré n et le coefficient dominant de f vaut $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$. De plus, $f(a_i) = 0$ pour $i \in [\![1 ; n]\!]$ (les i-ième et $n+1$-ième lignes sont identiques). On a donc trouvé n racines distinctes, comme le degré de f est n, on peut donc écrire [3] que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $f(x) = V(a_1, a_2, \dots, a_n) \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)$. Pour $x = a_{n+1}$, on trouve que

$$V(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = f(a_{n+1}) = V(a_1, a_2, \dots, a_n) \times \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_{n+1} - a_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \times \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (a_{n+1} - a_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i)$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

---

1. Si on n'aime pas les produits vides, faisons une initialisation à $n = 2$: $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (a_j - a_i)$ donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.
2. Il faut prendre $n \geqslant 2$, si on fait l'initialisation à $n = 2$.
3. Lorsque l'on a un polynôme de degré n et n racines comptées avec multiplicité, on peut le factoriser mais il ne faut pas oublier le coefficient dominant à mettre devant le produit.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Correction de l'exercice 14. Pour $n \in \mathbb{N}$, définissons la propriété de récurrence : [4]

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

- **Initialisation :** si $n = 1$, alors pour tout $a_1 \in \mathbb{K}$, $V(a_1) = \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix}$. Comme, par convention, un produit vide vaut toujours 1, $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 1} (a_j - a_i) = 1$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie. [5]
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}^*$ [6], supposons que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Soit $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Calculons le déterminant de $V(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$ en faisant des opérations sur les colonnes pour faire apparaître le maximum de zéros sur la dernière ligne :

$$V(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^j & \cdots & {a_1}^{n-1} & {a_1}^n \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^j & \cdots & {a_2}^{n-1} & {a_2}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_i & {a_i}^2 & \cdots & {a_i}^j & \cdots & {a_i}^{n-1} & {a_i}^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^j & \cdots & {a_n}^{n-1} & {a_n}^n \\ 1 & a_{n+1} & {a_{n+1}}^2 & \cdots & {a_n}^j & \cdots & {a_{n+1}}^{n-1} & {a_{n+1}}^n \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Notons pour plus de simplicité $V = V(a_1, a_2, \dots, a_{n+1})$. Remarquons que le terme en ${a_i}^j$ est la i-ième ligne et la $j+1$-ième colonne. En effectuant $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} - a_{n+1} C_n$, il vient

$$V = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^j & \cdots & {a_1}^{n-1} & {a_1}^{n-1}(a_1 - a_{n+1}) \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^j & \cdots & {a_2}^{n-1} & {a_2}^{n-1}(a_2 - a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_i & {a_i}^2 & \cdots & {a_i}^j & \cdots & {a_i}^{n-1} & {a_i}^{n-1}(a_i - a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^j & \cdots & {a_n}^{n-1} & {a_n}^{n-1}(a_n - a_{n+1}) \\ 1 & a_{n+1} & {a_{n+1}}^2 & \cdots & {a_{n+1}}^j & \cdots & {a_{n+1}}^{n-1} & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Puis on effectue $C_n \leftarrow C_n - a_{n+1} C_{n-1}$, on a

4. Ce qui suit va être très (trop) détaillé, cela a juste pour but de bien tout expliciter.

5. Si on n'aime pas les produits vides, faisons une initialisation à $n = 2$, pour tout $(a_1, a_2) \in \mathbb{K}^2$, $V(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1 = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant 2} (a_j - a_i)$ donc $\mathscr{P}(2)$ est vraie.

6. Il faut prendre $n \geqslant 2$, si on fait l'initialisation à $n = 2$.

$$V=\begin{vmatrix}
1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^j & \cdots & {a_1}^{n-2}(a_1-a_{n+1}) & {a_1}^{n-1}(a_1-a_{n+1})\\
1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^j & \cdots & {a_2}^{n-2}(a_2-a_{n+1}) & {a_2}^{n-1}(a_2-a_{n+1})\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & a_i & {a_i}^2 & \cdots & {a_i}^j & \cdots & {a_i}^{n-2}(a_i-a_{n+1}) & {a_i}^{n-1}(a_i-a_{n+1})\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^j & \cdots & {a_n}^{n-2}(a_n-a_{n+1}) & {a_n}^{n-1}(a_n-a_{n+1})\\
1 & a_{n+1} & {a_{n+1}}^2 & \cdots & {a_n}^j & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Puis après avoir modifié successivement les colonnes C_{n+1}, C_n etc, on modifie la colonne C_{j+1} par $C_{j+1} \leftarrow C_{j+1} - a_{n+1}C_j$, on obtient

$$V=\begin{vmatrix}
1 & a_1 & {a_1}^2 & \cdots & {a_1}^{j-1}(a_1-a_{n+1}) & \cdots & {a_1}^{n-2}(a_2-a_{n+1}) & {a_1}^{n-1}(a_1-a_{n+1})\\
1 & a_2 & {a_2}^2 & \cdots & {a_2}^{j-1}(a_2-a_{n+1}) & \cdots & {a_2}^{n-2}(a_2-a_{n+1}) & {a_2}^{n-1}(a_2-a_{n+1})\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & a_i & {a_i}^2 & \cdots & {a_i}^{j-1}(a_i-a_{n+1}) & \cdots & {a_i}^{n-2}(a_i-a_{n+1}) & {a_i}^{n-1}(a_i-a_{n+1})\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & a_n & {a_n}^2 & \cdots & {a_n}^{j-1}(a_n-a_{n+1}) & \cdots & {a_n}^{n-2}(a_n-a_{n+1}) & {a_n}^{n-1}(a_n-a_{n+1})\\
1 & a_{n+1} & {a_{n+1}}^2 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Après avoir traité toutes les colonnes jusqu'à la quatrième, on effectue $C_3 \leftarrow C_3 - a_{n+1}C_3$, on obtient

$$V=\begin{vmatrix}
1 & a_1 & a_1(a_1-a_{n+1}) & \cdots & {a_1}^{j-1}(a_1-a_{n+1}) & \cdots & {a_1}^{n-2}(a_1-a_{n+1}) & {a_1}^{n-1}(a_1-a_{n+1})\\
1 & a_2 & a_2(a_2-a_{n+1}) & \cdots & {a_2}^{j-1}(a_2-a_{n+1}) & \cdots & {a_2}^{n-2}(a_2-a_{n+1}) & {a_2}^{n-1}(a_2-a_{n+1})\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & a_i & a_i(a_i-a_{n+1}) & \cdots & {a_i}^{j-1}(a_i-a_{n+1}) & \cdots & {a_i}^{n-2}(a_i-a_{n+1}) & {a_i}^{n-1}(a_i-a_{n+1})\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & a_n & a_n(a_n-a_{n+1}) & \cdots & {a_n}^{j-1}(a_n-a_{n+1}) & \cdots & {a_n}^{n-2}(a_n-a_{n+1}) & {a_n}^{n-1}(a_n-a_{n+1})\\
1 & a_{n+1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Finalement, effectuons $C_2 \leftarrow C_2 - a_{n+1}C_1$, on a alors

$$V=\begin{vmatrix}
1 & a_1-a_{n+1} & a_1(a_1-a_{n+1}) & \cdots & {a_1}^{j-1}(a_1-a_{n+1}) & \cdots & {a_1}^{n-2}(a_1-a_{n+1}) & {a_1}^{n-1}(a_1-a_{n+1})\\
1 & a_2-a_{n+1} & a_2(a_2-a_{n+1}) & \cdots & {a_2}^{j-1}(a_2-a_{n+1}) & \cdots & {a_2}^{n-2}(a_2-a_{n+1}) & {a_2}^{n-1}(a_2-a_{n+1})\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & a_i-a_{n+1} & a_i(a_i-a_{n+1}) & \cdots & {a_i}^{j-1}(a_i-a_{n+1}) & \cdots & {a_i}^{n-2}(a_i-a_{n+1}) & {a_i}^{n-1}(a_i-a_{n+1})\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots\\
1 & a_n-a_{n+1} & a_n(a_n-a_{n+1}) & \cdots & {a_n}^{j-1}(a_n-a_{n+1}) & \cdots & {a_n}^{n-2}(a_n-a_{n+1}) & {a_n}^{n-1}(a_n-a_{n+1})\\
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{vmatrix}_{[n+1]}$$

On a alors la dernière ligne avec quasiment que des zéros, on va donc développer notre déterminant par rapport à cette ligne [7].

$$V = 1 \times (-1)^{(n+1)+1} \times \begin{vmatrix} a_1 - a_{n+1} & a_1(a_1 - a_{n+1}) & \cdots & {a_1}^{j-1}(a_1 - a_{n+1}) & \cdots & {a_1}^{n-2}(a_1 - a_{n+1}) & {a_1}^{n-1}(a_1 - a_{n+1}) \\ a_2 - a_{n+1} & a_2(a_2 - a_{n+1}) & \cdots & {a_2}^{j-1}(a_2 - a_{n+1}) & \cdots & {a_2}^{n-2}(a_2 - a_{n+1}) & {a_2}^{n-1}(a_2 - a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_i - a_{n+1} & a_i(a_i - a_{n+1}) & \cdots & {a_i}^{j-1}(a_i - a_{n+1}) & \cdots & {a_i}^{n-2}(a_i - a_{n+1}) & {a_i}^{n-1}(a_i - a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n - a_{n+1} & a_n(a_n - a_{n+1}) & \cdots & {a_n}^{j-1}(a_n - a_{n+1}) & \cdots & {a_n}^{n-2}(a_n - a_{n+1}) & {a_n}^{n-1}(a_n - a_{n+1}) \end{vmatrix}_{[n]} + 0 \times (-1)^{(n+1)+2} \times \dots$$

Par linéarité du déterminant on peut factoriser par $a_i - a_{n+1}$ dans la ligne i, on obtient alors

$$V = (-1)^n \times \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_{n+1}) \times \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & {a_1}^{j-1} & \cdots & {a_2}^{n-2} & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & {a_2}^{j-1} & \cdots & {a_2}^{n-2} & {a_2}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_i & \cdots & {a_i}^{j-1} & \cdots & {a_i}^{n-2} & {a_i}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & {a_n}^{j-1} & \cdots & {a_n}^{n-2} & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix}_{[n]}$$

On reconnaît alors l'expression du déterminant de Vandermonde de taille n, on peut donc utiliser l'hypothèse de récurrence et en déduire que

$$V(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) = 1 \times (-1)^n \times \prod_{i=1}^{n} (a_i - a_{n+1}) \times V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_{n+1} - a_i) \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (a_j - a_i)$$

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$.

- **Conclusion :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \quad V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.

1. M est antisymétrique, donc $M = -M^T$, donc en utilisant la formule $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$, on obtient $\det(M) = \det(-M^T) = (-1)^n \det(M^T)$. De plus, d'après le cours, une matrice et sa transposée ont même déterminant. Donc $\det(M) = (-1)^n \det(M)$. Enfin, n est impair, donc $(-1)^n = -1$. Donc, $\det(M) = -\det(M)$. Ainsi, $2\det(M) = 0$. Dès lors, $\det(M) = 0$.
2. Supposons que $M^2 = -I_n$, alors $\det(M^2) = \det(-I_n)$. Donc $\det(M)^2 = (-1)^n \det(I_n)$. Dès lors, $(-1)^n = \det(M)^2 \geqslant 0$, donc n est pair. On a donc $\det(M)^2 = 1$, ainsi $\det(M) = 1$ ou $\det(M) = -1$. Les valeurs possibles de $\det(M)$ sont donc 1 et -1.
3. Comme $MN + NM = 0_n$, $MN = -NM$, ainsi $\det(MN) = \det(-NM) = (-1)^n \det(NM)$. Or le déterminant du produit de deux matrices est égal au produit des déterminants des matrices. Ainsi, $\det(M)\det(N) = (-1)^n \det(N)\det(M)$. Comme les matrices M et N sont inversibles, leur déterminant est non nul, ainsi $1 = (-1)^n$. Par conséquent n est pair.

7. Je vous conseille donc de réviser cette formule de développement par rapport à une ligne ou une colonne, en particulier la règle des signes.

4. Soit N une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$. Ainsi, $\det(N^p) = \det(0_n) = 0$. Comme le déterminant du produit est égal au produit des déterminants, on a $\det(N)^p = 0$. Ainsi, nécessairement, $\det(N) = 0$. En conclusion, une matrice nilpotente n'est jamais inversible.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19. $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \mathrm{rg}(A) \leqslant p < n$, comme $AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que AB n'est pas inversible, donc $\det(AB) = 0$.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.

Correction de l'exercice 23. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/mGQ2hGmh-_8

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26. Posons $\mathscr{F} = (X^2, X(X-1), (X-1)^2)$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, en développant par rapport à la première colonne, on obtient, $\det(A) = (-1)^{3+1} \times 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Ainsi, $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = 1$. Dès lors, $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Correction de l'exercice 27. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{F} = (e_1, e_2, e_3)$. On calcule $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos^2(a) & \cos^2(b) & \cos^2(c) \end{pmatrix}$$

On calcule[8] alors $\det(A)$:

$$\begin{aligned}
\det(A) &\underset{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(a) & \cos(b)-\cos(a) & \cos(c)-\cos(a) \\ \cos^2(a) & (\cos(b)-\cos(a))(\cos(b)+\cos(a)) & (\cos(c)-\cos(a))(\cos(c)+\cos(a)) \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{1+1} \times 1 \begin{vmatrix} \cos(b)-\cos(a) & \cos(c)-\cos(a) \\ (\cos(b)-\cos(a))(\cos(b)+\cos(a)) & (\cos(c)-\cos(a))(\cos(c)+\cos(a)) \end{vmatrix} \\
&= (\cos(b)-\cos(a))(\cos(c)-\cos(a)) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(b)+\cos(a) & \cos(c)+\cos(a) \end{vmatrix} \\
&= (\cos(b)-\cos(a))(\cos(c)-\cos(a))(\cos(c)-\cos(b))
\end{aligned}$$

8. Ce calcul est en fait inutile si on reconnaît un déterminant de Vandermonde.

Ainsi, $\mathscr{F}$ est une base si et seulement si $(\cos(b)-\cos(a))(\cos(c)-\cos(a))(\cos(c)-\cos(b))$. On en déduit donc que $\mathscr{F}$ est une base si et seulement si

$$b \not\equiv a\,[2\pi] \qquad b \not\equiv -a\,[2\pi] \qquad c \not\equiv a\,[2\pi] \qquad c \not\equiv -a\,[2\pi] \qquad c \not\equiv b\,[2\pi] \qquad \text{et} \qquad c \not\equiv -b\,[2\pi]$$