



Prerequis de ce chapitre : ensembles et applications. Dans ce chapitre, on indique quelques résultats de dénombrement pour préparer le cours de probabilité.

Table des matières

| | |
|--|----------|
| 1 Cardinal d'un ensemble fini | 2 |
| 1.1 Définition et opérations | 2 |
| 1.2 Applications entre ensembles finis | 4 |
| 2 Listes et combinaisons | 4 |
| 2.1 p -listes | 4 |
| 2.2 p -listes d'éléments distincts | 5 |
| 2.3 Permutations | 5 |
| 2.4 Combinaisons/Parties à p -éléments | 5 |
| 3 Résumé sous forme de tableau | 7 |

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition et opérations



Définition du cardinal d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini, on appelle cardinal le nombre de ses éléments, et on le note $|E|$ ou $\text{Card}(E)$.

Remarque 1. Cette définition n'est pas très précise, elle ne définit pas ce qu'est un ensemble fini ni ce qu'est le nombre d'éléments. Précisons cette définition : un ensemble E est dit **fini** s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow E$. On montre alors que le n en question est alors unique, et on note $\text{Card}(E) = n$.

Démonstration de l'unicité du cardinal d'un ensemble fini : Soit E un ensemble fini, il existe alors $n \in \mathbb{N}$ et une bijection $\varphi: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow E$. Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ et une bijection $\psi: \llbracket 1; m \rrbracket \rightarrow E$, alors $\psi^{-1} \circ \varphi: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; m \rrbracket$ est une bijection. Soit $\mathcal{P}(n)$: «Si $m \in \mathbb{N}$ tel que $\llbracket 1; n \rrbracket$ est en bijection avec $\llbracket 1; m \rrbracket$ alors $m = n$ ». Si $n = 0$, comme l'ensemble vide n'est pas en bijection avec un ensemble non vide, $m = n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons, $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $f: \llbracket 1; n+1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1; m \rrbracket$ une bijection, et τ la bijection de $\llbracket 1; m \rrbracket$ dans lui-même échangeant $f(n+1)$ et m . Alors la restriction de $\tau \circ f$ à $\llbracket 1; n \rrbracket$ est une bijection entre $\llbracket 1; n \rrbracket$ et $\llbracket 1; m-1 \rrbracket$ donc $n = m-1$ donc $n+1 = m$. Ceci prouve que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi $n = m$.

Exemple 1. • $|\{1, 1, 3, 1, -8\}| =$.

- Soit deux entiers $a \leq b$, alors $\text{Card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b - a + 1$, en particulier, $\text{Card}(\llbracket 1; n \rrbracket) = n$, $\text{Card}(\llbracket 0; n \rrbracket) = n + 1$ si $n \in \mathbb{N}$.
- $\text{Card}(\emptyset) = 0$.
- Les ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} , \mathbb{C} , $\mathbb{R}[X]$ etc. ne sont pas finis.

Démonstration de l'exemple : Notons $E = \{1, 1, 3, 1, -8\}$, alors $|E| = 3$, en effet, posons $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ et $f(3) = -8$. Alors, $f: \llbracket 1; 3 \rrbracket \rightarrow E$ est bijective.

On vérifie que $p: \begin{cases} \llbracket 1; b-a+1 \rrbracket \longrightarrow \llbracket a; b \rrbracket \\ p \longmapsto p+a-1 \end{cases}$ est une bijection. Ainsi, $\llbracket a; b \rrbracket$ est un ensemble fini et $\text{Card}(\llbracket a; b \rrbracket) = b-a+1$.

Il suffit alors de prendre $(a, b) = (0, n)$ puis $(a, b) = (1, n)$.



Proposition n° 1 : partie d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et $A \subset E$, alors : A est fini et $|A| \leq |E|$ et $A = E$ ssi $|A| = |E|$

Lemme 1. Si E est un ensemble fini non vide et $e \in E$, alors $|E \setminus \{e\}| = |E| - 1$.

Démonstration du lemme 1 : Notons $n = |E|$ et $\varphi: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow E$ une bijection. Considérons τ la bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui échange n et $\varphi^{-1}(e)$. Alors $\psi = \varphi \circ \tau$ est une bijection de $\llbracket 1; n \rrbracket$ vers E , tel que $\psi(n) = e$. Ainsi, $\psi|_{\llbracket 1; n-1 \rrbracket}: \llbracket 1; n-1 \rrbracket \rightarrow E \setminus \{e\}$ est une bijection. Ainsi, $|E \setminus \{e\}| = n - 1 = |E| - 1$.

Démonstration de la proposition n° 1 : On note $\mathcal{P}(n)$: «Si E est un ensemble fini de cardinal n et $A \subset E$, alors A est fini et $|A| \leq |E|$ ». Si $n = 0$, et $|E| = n$, et si $A \subset E = \emptyset$, alors $E = \emptyset$. Ceci prouve que A est fini et que $|A| \leq |E|$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Considérons E un ensemble fini de cardinal $n+1$ et $A \subset E$. Distinguons les cas :

- Si $A = E$, alors A est fini et $|A| = |E|$.
- Si $A \neq E$, comme $A \subset E$, on peut en déduire que $E \not\subset A$, ainsi il existe $e \in E$ tel que $e \notin A$. Ainsi, $A \subset E \setminus \{e\}$, or, d'après le lemme, $E \setminus \{e\}$ est un ensemble fini de cardinal n . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à l'ensemble $E \setminus \{e\}$, A est alors un ensemble fini et $|A| \leq |E \setminus \{e\}| = n < n+1 = |E|$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence le résultat est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on a démontré que si $A \subset E$ avec $|E| = n+1 \geq 1$ et $A \neq E$, alors $|A| < |E|$. Par contraposée, dans le cas où $|E| = n+1$, si $|A| = |E|$, alors $A = E$. Il reste à traiter le cas où $|E| = 0$, mais si $A \subset E = \emptyset$, alors $A = \emptyset = E$. ■



Proposition n° 2 : cardinal de l'union

Soient E un ensemble fini et A et B deux parties de E .

1. Si A et B sont disjointes, alors $|A \cup B| = |A| + |B|$
2. $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$ $|\overline{A}| = |E| - |A|$ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
3. Si A_1, A_2, \dots, A_n sont des parties de E deux à deux disjointes, alors, $\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$

Démonstration de la proposition n° 2 :

1. Notons $n = |A|$ et $m = |B|$, alors il existe $\varphi: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow A$ et $\psi: \llbracket 1; m \rrbracket \rightarrow B$ deux bijections. On pose alors

$$\Phi: \begin{cases} \llbracket 1; n+m \rrbracket \longrightarrow A \cup B \\ p \longmapsto \begin{cases} \varphi(p) & \text{si } p \leq n \\ \psi(p-n) & \text{si } p > n \end{cases} \end{cases}$$

Montrons que Φ est injective : soit $(k, k') \in \llbracket 1; n+m \rrbracket$. Supposons $\Phi(k) = \Phi(k')$, alors comme $\Phi(k) \in A \cap B$, il y a deux cas : soit $\Phi(k) = \Phi(k') \in A$ et comme $A \cap B = \emptyset$, on en déduit que $\Phi(k) = \Phi(k') \notin B$, ainsi nécessairement, $p \leq n$ et on a $\varphi(n) = \varphi(m)$ et comme φ est injective, $n = m$, si $\Phi(k) = \Phi(k') \in B$, alors de même $\psi(k-n) = \psi(k'-n)$ et par injective de ψ , $k-n = k'-n$ et donc $k = k'$. Ainsi, Φ est injective. Soit $x \in A \cup B$, alors si $x \in A$, il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x = \varphi(k)$ et donc $x = \Phi(k)$, si $x \in B$, alors il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x = \psi(k) = \Phi(k+n)$, ainsi Φ est surjective. Comme Φ est bijective, on en déduit que $A \cap B$ est fini et que $\text{Card}(A \cap B) = n + m = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

- 2.
- 3.

■

Exemple 2. • Dans $\llbracket 0; 99 \rrbracket$, combien y a-t-il de nombres entiers qui contiennent au moins un 1 ?
 • Sur un jeu de 52 cartes, combien y a-t-il de cartes qui sont des trèfles ou des rois ?



Proposition n° 3 : cardinal du produit

1. Si E et F sont deux ensembles finis, alors $E \times F$ est un ensemble fini et $|E \times F| = |E| \times |F|$
2. Si E_1, E_2, \dots, E_n sont des ensembles finis, alors $\prod_{i=1}^n E_i$ est fini et $\left| \prod_{i=1}^n E_i \right| = \prod_{i=1}^n |E_i|$

Démonstration de la proposition n° 3 :

1. Posons l'hypothèse de récurrence : $\mathcal{P}(n)$: «Si E est un ensemble fini de cardinal n et F un ensemble fini, alors $E \times F$ est un ensemble fini, et $|E \times F| = |E| \times |F|$. Si $n = 0$, alors $E = \emptyset$, et $E \times F = \emptyset$, ainsi $|E \times F| = 0 = |E| \times |F|$. Si $n = 1$, alors $|E| = 1$, ainsi, $E = \{e\}$, alors, $\varphi: f \mapsto (e, f)$ est une bijection de F vers $E \times F$, ainsi comme F est fini, $E \times F$ est fini et $|E \times F| = |F| = |E| \times |F|$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit E un ensemble de cardinal $n + 1$, en particulier E est non vide. Fixons $e \in E$. Et posons $E' = E \setminus \{e\}$. Alors $E \times F = (E' \times F) \cup (\{e\} \times F)$, et cette union est disjointe. Or, par récurrence $E' \times F$ est fini, et $\{e\} \times F$ est fini (voir $\mathcal{P}(1)$), ainsi $E \times F$ est fini, et

$$|E \times F| = |E' \times F| + |\{e\} \times F| = |E'| \times |F| + |F| = (|E| - 1) \times |F| + |F| = |E| \times |F|$$

2. Récurrence sur n .

■

Exemple 3. • Si on lance un dé puis une pièce, combien y a-t-il de possibilités ?
 • À la cantine, il y a 3 entrée, 2 plats et 4 desserts (on peut toujours rêver), combien cela fait de menus possibles ?



Proposition n° 4 : cardinal de l'ensemble des parties de E

Soit E un ensemble fini, alors $\mathcal{P}(E)$ est un ensemble fini et $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$

Démonstration de la proposition n° 4 : Posons l'hypothèse de récurrence $\mathcal{Q}(n)$: «Si $|E| = n$, alors $\mathcal{P}(E) = 2^n$. Si $n = 0$, alors $E = \emptyset$, et $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$, alors E est fini et $|\mathcal{P}(E)| = 1 = 2^0$, ainsi $\mathcal{Q}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{Q}(n)$ vraie. Soit E un ensemble tel que $|E| = n + 1$. Fixons $e \in E$, alors si $F \in \mathcal{P}(E)$, il a deux possibilités : $e \in F$ ou $e \notin F$, ainsi, en notant $E' = E \setminus \{e\}$, on obtient que $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(E') \cup \{F \cup \{e\} \mid F \in \mathcal{P}(E')\}$. Notons $R = \{F \cup \{e\} \mid F \in \mathcal{P}(E')\}$. Or $|E'| = |E| - 1 = n$, ainsi on peut appliquer $\mathcal{Q}(n)$ à E' . Dès lors $\mathcal{P}(E')$ est fini et $|\mathcal{P}(E')| = 2^n$. Notons que $F \mapsto F \cup \{e\}$ est une bijection de $\mathcal{P}(E')$ vers R , ainsi R est aussi fini et $|R| = |\mathcal{P}(E')| = 2^n$. De plus, R et $\mathcal{P}(E')$ sont disjoints. Dès lors, $\mathcal{P}(E)$ est fini et $|\mathcal{P}(E)| = |\mathcal{P}(E')| + |R| = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Dès lors, $\mathcal{Q}(n+1)$ est vraie. ■

Exemple 4. Si $E = \{1, 2, 3\}$, $|\mathcal{P}(E)| =$

1.2 Applications entre ensembles finis



Proposition n° 5 : fonctions injectives, surjectives et bijectives et cardinaux

Soit E et F deux ensembles.

1. Si $f: E \rightarrow F$ est bijective, alors E est un ensemble fini ssi F est un ensemble fini et dans ce cas $|E| = |F|$.
2. Si $f: E \rightarrow F$ injective et que F est un ensemble fini, alors E est un ensemble fini et $|F| \geq |E|$.
3. Si $f: E \rightarrow F$ surjective et que E est un ensemble fini, alors F est un ensemble fini et $|F| \leq |E|$.
4. Si E et F sont deux ensembles finis et que $|E| = |F|$ et que $f: E \rightarrow F$, alors sont équivalents :

$$f \text{ surjective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ bijective}$$

Démonstration de la proposition n° 5 :

1. Prenons $f: E \rightarrow F$ bijective. Supposons E de cardinal fini n , alors il existe $\phi: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow E$ une bijection, par composée, $\phi \circ f: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow F$ est une bijection. Ceci prouve que F est un ensemble fini, $|F| = n = |E|$. De même, supposons F de cardinal fini n , alors il existe $\phi: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow F$ une bijection, par composée, $\phi \circ f^{-1}: \llbracket 1; n \rrbracket \rightarrow E$ est une bijection. Ceci prouve que E est un ensemble fini, $|E| = n = |F|$.

2. Prenons $f: E \rightarrow F$ injective et F un ensemble fini. Alors $\tilde{f}: \begin{cases} E \longrightarrow f(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection. Or $f(E) \subset F$, ainsi $f(E)$ est un ensemble fini et $|f(E)| \leq |F|$, mais en appliquant le point 1 à \tilde{f} , E est un ensemble fini et $|E| = |f(E)| \leq |F|$.

3. Prenons $f: E \rightarrow F$ surjective avec E un ensemble fini. Pour tout $y \in F$, choisissons $x_f \in E$, un antécédent de y par f : $f(x_f) = y$. On a donc construit une fonction $i: \begin{cases} F \longrightarrow E \\ y \longmapsto x_f \end{cases}$, cette fonction est injective, par le point précédent appliqué à i , F est un ensemble fini et $|F| \leq |E|$.

4. Si f est bijective, alors f est surjective et f est injective.

Supposons f injective, alors, comme on l'a déjà vu, $\begin{cases} E \longrightarrow f(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection, donc $|f(E)| = |E| = |F|$, ainsi comme $f(E) \subset F$, on en déduit $f(E) = F$ donc que f est surjective, puis injective.

Supposons f surjective, alors $\tilde{i}: \begin{cases} F \longrightarrow i(F) \\ y \longmapsto x_f \end{cases}$ est une bijection, donc $|i(F)| = |F| = |E|$, comme $i(F) \subset E$, il s'ensuit que $i(F) = E$, donc i est une bijection de F vers E . or, $f \circ i = \text{Id}_F$. En composant par \tilde{i}^{-1} , $f = \tilde{i}^{-1}$ est bijective. ■

Exemple 5. Dans la classe, il existe au moins deux personnes qui sont nés le même mois.

Si on a $n + 1$ pantalons rangés dans n tiroirs, il existe au moins un tiroir avec plus d'un pantalon.



Proposition n° 6 : dénombrement de $\mathcal{F}(E, F) = F^E$

Si E et F deux ensembles finis, alors $\mathcal{F}(E, F) = F^E$ est un ensemble fini et $|\mathcal{F}(E, F)| = |F^E| = |F|^{|E|}$

2 Listes et combinaisons

2.1 p -listes



Définition d'une p -liste (ou d'un p -uplet)

| Soit E un ensemble et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle p -liste (ou p -uplet) d'éléments de E tout élément de E^p .



Proposition n° 7 : nombre de p -listes

| Soit E un ensemble fini, alors le nombre de p -listes d'éléments de E est

$$|E^p| = |E|^p$$

Exemple 6. Un élève a 10 notes de colles (des entiers naturels) comprises entre 4 et 12, combien cela fait-il de possibilités ?

2.2 p -listes d'éléments distincts

Définition de p -listes d'éléments distincts

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle p -liste (ou p -uplet ou p -arrangement) d'éléments distincts de E tout élément $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in E^p$ tel que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, si $i \neq j$, alors $x_i \neq x_j$.

Proposition n° 8 : nombre de p -listes d'éléments distincts/arrangement

Si $|E| = n$ et $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors le nombre de p -listes d'éléments distincts de E est

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

Exemple 7. Sur une course de 100 cyclistes, combien y a-t-il de podium différents possibles ?

Proposition n° 9 : nombre d'applications injectives

Si $|E| = n$ et $|F| = p$ avec $p \leq n$, le nombre de fonctions injectives de F vers E est

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

2.3 Permutations

Définition d'une permutation d'un ensemble

Soit E un ensemble fini de cardinal n , on appelle permutation de toute n -liste d'éléments distincts de E .

Proposition n° 10 : nombre de permutations

Si E est un ensemble fini de cardinal n , alors le nombre de permutations de E est

$$n!$$

Exemple 8. Si on mélange un jeu de 32 cartes combien cela fait-il de possibilités ?

Proposition n° 11 : nombre de bijections

Si E et F sont deux ensembles finis tels que $|E| = |F| = n$, le nombre de bijections de E vers F est

$$n!$$

2.4 Combinaisons/Parties à p -éléments

Définition d'une partie à p éléments

Soit E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$, on appelle partie à p éléments de E (ou p -combinaison de E) tout sous-ensemble de E à p éléments.

Proposition n° 12 : nombre de parties à p éléments

Si $|E| = n$ et $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, le nombre de parties à p éléments de E est

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exemple 9. Sur un jeu de 52 cartes, on tire 5 cartes. Combien cela fait-il de possibilités ?



Proposition n° 13 : propriétés des coefficients binomiaux

Soit n un entier naturel non nul.

- | | | |
|---|---|---|
| 1. Pour tout $p \in \llbracket 0; n \rrbracket$, | $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ | symétrie des coefficients binomiaux |
| 2. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, | $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, $\binom{n}{n-2} = \frac{n(n-1)}{2}$, | $\binom{n}{n-1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$ |
| 3. Pour tout $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, | $p \times \binom{n}{p} = n \times \binom{n-1}{p-1}$ | formule du maire |
| 4. Pour tout $p \in \llbracket 2; n \rrbracket$, | $p \times (p-1) \times \binom{n}{p} = n \times (n-1) \times \binom{n-2}{p-2}$ | formule du maire et de l'adjoint |
| 5. Pour tout $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, | $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$ | formule du triangle de Pascal |
| 6. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, | $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ | formule du binôme de Newton |

3 Résumé sous forme de tableau

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, E un ensemble fini à n éléments et F un ensemble fini à p éléments.

| Type d'objets | Partie de E (sous-ensemble de E) | Partie de E à p éléments | p -liste d'éléments de E (ou p -uplet) | p -liste d'éléments de E sans répétition (arrangement) |
|---|--|--|--|---|
| Définition | On dit que F est une partie (ou sous-ensemble) de E si $F \subset E$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E . Par conséquent, $F \in \mathcal{P}(E) \iff F \subset E$ | On dit que F est une partie de E à p -éléments, si $F \subset E$ et si $ F = p$. | Une p -liste de E est de la forme (a_1, a_2, \dots, a_p) ou pour tout $i, a_i \in E$: $E^p = \{(a_1, a_2, \dots, a_p) \mid \forall i, a_i \in E\}$ | Une p -liste de E , (a_1, a_2, \dots, a_p) , est sans répétition si pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, si $i \neq j$ implique que $a_i \neq a_j$. |
| L'ordre compte | Non | Non | Oui | Oui |
| Répétition possible | Non | Non | Oui | Non |
| Exemple pour $E = \{1, 2, 3\}$ et $p = 2$ | \emptyset $\{1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$ $\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$ $\{1, 2, 3\}$ | $\{1, 2\}$ $\{1, 3\}$ $\{2, 3\}$ | $(1, 1)$ $(1, 2)$ $(1, 3)$ $(2, 1)$ $(2, 2)$ $(2, 3)$ $(3, 1)$ $(3, 2)$ $(3, 3)$ | $(1, 2)$ $(1, 3)$ $(2, 3)$ $(2, 1)$ $(3, 1)$ $(3, 2)$ |
| Dénombrement | $ \mathcal{P}(E) = 2^n$ | $\binom{n}{p}$ si $p \leq n$, 0 sinon | n^p | $\frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leq n$, 0 sinon |
| Interprétation mathématiques | Nombre d'applications de E vers $\{0, 1\}$ | Nombre de termes de la forme $a^p b^{n-p}$ si on développe $(a + b)^n$ | Compte le nombre d'applications de F vers E . | Compte le nombre d'applications injectives de F vers E . |
| Interprétation : urne avec n boules | Nombre de tirages simultanés d'un nombre quelconque de boules | Nombre de tirages simultanés de p boules | Nombre de tirages successifs de p boules avec remise | Nombre de tirages successifs de p boules sans remise |