Développement limité

1. $f(x) = \sin(\ln(1+x)) \underset{0}{=} \sin\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)\right)$. On pose $u = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3)$. Alors :
   - $u^2 = x^2 - x^3 + \mathcal{O}(x^3)$
   - $u^3 = x^3 + \mathcal{O}(x^3)$
   - $u^3 \sim x^3$ donc $\mathcal{O}(u^3) = \mathcal{O}(x^3)$

   Ainsi, $f(x) \underset{0}{=} \sin(u) = u - \dfrac{u^3}{6} + \mathcal{O}(u^3) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^3) - \dfrac{x^3 + \mathcal{O}(x^3)}{6} + \mathcal{O}(x^3) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$
2. Par troncature, d'un développement limité, $f(x) = x + \mathcal{O}(x)$, ainsi $y = x$ est l'équation de la tangente de f en 0. De plus, $f(x) - x \underset{0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$. Or, deux fonctions équivalentes au voisinage de 0 ont même signe au voisinage de 0, ainsi, $f(x) - x < 0$ au voisinage de 0 (sauf en 0), la fonction est en dessous de sa tangente en 0 au voisinage de 0.

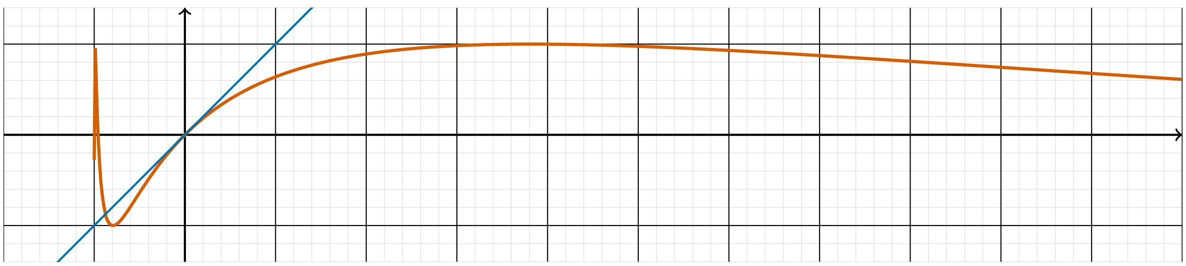

FIGURE 1 – En rouge la courbe de f en bleu la tangente en 0 de f. On remarque que la fonction est en dessous de la tangente de 0 seulement sur un voisinage de 0 et non pas sur $]-1\,;+\infty[$ tout entier.

3. $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $]-1\,;+\infty[$, et sin est aussi de classe $\mathscr{C}^3$ sur $\mathbb{R}$, par composition, f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $]-1\,;+\infty[$. Ainsi, d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{6} + \mathcal{O}(x^3)$$

   Par unicité, d'un développement limité en 0, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$ et $f^{(3)}(0) = 1$.

Diagonalisation

1. $\operatorname{rg}(M - 2I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_1=0}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$ (les deux dernières colonnes sont non colinéaires)

   $\operatorname{rg}(M - 3I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_1=-C_2 \\ C_3=-7C_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ (un seul vecteur et il est non nul)
2. - D'après le théorème du rang version matricielle, $3 = \dim(\operatorname{Ker}(M - 2I_3)) + \operatorname{rg}(M - 2I_3)$, ainsi, $\dim(\operatorname{Ker}(M - 2I_3) = 1$. De plus, comme $C_1 = 0$, on a $1C_1 + 0C_2 + 0C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(M - 2I_3)$.

     Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(M - 2I_3)$ (un seul vecteur et il est non nul) dont le cardinal est égale à la dimension du noyau, donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\operatorname{Ker}(M - 2I_3)$.

- D'après le théorème du rang version matricielle, $3 = \dim(\text{Ker}(M - 3I_3)) + \text{rg}(M - 3I_3)$, ainsi, $\dim(\text{Ker}(M-2I_3) = 2$. De plus, comme $C_1 = -C_2$, on a $1C_1+1C_2+0C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in \text{Ker}(M-3I_3)$.

  Comme $C_3 = -7C_2$, on a $0C_1 + 7C_2 + 1C_3 = 0$, donc $\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix} \in \text{Ker}(M - 3I_3)$.

  Ainsi, $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\text{Ker}(M - 3I_3)$ (deux vecteurs et ils sont non colinéaires) dont le cardinal est égale à la dimension du noyau, donc $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\text{Ker}(M - 3I_3)$.

3. Posons $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}\right)$ la concaténation des deux bases. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Supposons :

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix} = 0_{3,1}$$

   Ainsi, $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta+7\gamma\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\gamma = 0$ puis $\beta = 0$ puis enfin $\alpha = 0$. Dès lors $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. De plus, $|\mathscr{B}'| = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, on en déduit que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{K})$.

4. On sait que $M = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f_M)$. Cherchons $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f_M)$.
   - $f_M\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = M\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}$
   - $f_M\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}$
   - $f_M\left(\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}\right) = M\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\21\\3\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\7\\1\end{pmatrix}$

   Ainsi, posons $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f_M) = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$. De plus, d'après la formule de changement de base $M = PDP^{-1}$ avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&7\\0&0&1\end{pmatrix}$

Décathlon

1. Soit $(P, Q, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$, alors par linéarité de l'intégrale :

$$L(\lambda P + Q) = \int_{-1}^{1} (\lambda P + Q)(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} \lambda P(t) + Q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} P(t) + \int_{-1}^{1} Q(t)\,\mathrm{d}t = \lambda L(P) + L(Q)$$

   De plus, $L(P) \in \mathbb{R}$, ainsi, $L\colon E \to \mathbb{R}$ est linéaire, donc L est une forme linéaire sur E.

2. Soit $k \in [\![0\,;2n]\!]$,

$$L(e_k) = L(X^k) = \int_{-1}^{1} t^k \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{k+1} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \text{ impair} \\ \dfrac{2}{k+1} & \text{si} \quad k \text{ pair} \end{cases}$$

3. Présentons deux méthodes :
   - Comme L est une forme linéaire non nulle (car $L(1) = 2 \neq 0$), son noyau est un hyperplan de E, donc $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(E) - 1 = (2n+1) - 1 = 2n$. De plus, d'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) + \dim(\mathrm{Im}(L))$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 1$.
   - $\mathrm{Im}(L) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, par linéarité de L, $L\left(\dfrac{\lambda}{2} \times 1\right) = \dfrac{\lambda}{2} L(1) = \lambda$, on en déduit que $\lambda \in \mathrm{Im}(L)$, ainsi, $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}(L)$, par double inclusion, $\mathrm{Im}(L) = \mathbb{R}$ et $\dim(\mathrm{Im}(L)) = 1$, d'après le théorème du rang, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(L)) = 2n + 1 - 1 = 2n$

4. Comme $L(e_1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} t \,\mathrm{d}t = 0$, $e_1 \in \mathrm{Ker}(L)$, de plus (e_1) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(L)$ (un seul vecteur non nul). Or, $\mathrm{Ker}(L)$ est un espace vectoriel de dimension finie, ainsi, d'après le théorème de la base incomplète il existe $\mathscr{U}$ une base de $\mathrm{Ker}(L)$ dont le premier vecteur est e_1.

5. Soit $P \in \mathrm{vect}(e_0) \cap \mathrm{Ker}(L)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $P = \lambda e_0 = \lambda$, de plus, $P \in \mathrm{Ker}(L)$ donc $L(P) = 0$, par linéarité, $L(P) = \lambda L(e_0) = \lambda 2$, donc $\lambda = 0$, ainsi, $P = 0$, donc $\mathrm{vect}(e_0) \cap \mathrm{Ker}(L) \subset \{0\}$, comme ce sont des sous-espaces vectoriels, on en déduit que $\mathrm{vect}(e_0) \cap \mathrm{Ker}(L) = \{0\}$. Ainsi, la somme est directe.

   De plus, (e_0) est une famille génératrice de $\mathrm{vect}(e_0)$ et comme $e_0 \neq 0$, cette famille est libre, ainsi, (e_0) est une base de $\mathrm{vect}(e_0)$. Donc $\dim(\mathrm{vect}(e_0)) = 1$, de plus, $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(E) - 1$. Par conséquent, $\dim(\mathrm{vect}(e_0)) + \dim(\mathrm{Ker}(L)) = \dim(E)$.

   D'après un résultat de cours, on peut en conclure, que $E = \mathrm{vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$.

6. Soit $P \in E$, remarquons que $d^\circ \lambda L(P)X \leqslant 1 < 2 \leqslant 2n$ (car $n \in \mathbb{N}^*$), donc $\lambda L(P)X \in E$, comme E est un espace vectoriel, on en déduit que $T_\lambda(P) = P + \lambda L(P)X \in E$.

   De plus, soit $(P, Q, \alpha) \in E^2 \times \mathbb{R}$, comme L est linéaire :

$$\begin{aligned} T_\lambda(\alpha P + Q) &= \alpha P + Q + \lambda L(\alpha P + Q)X = \alpha P + Q + \lambda(\alpha L(P) + L(Q))X \\ &= \alpha(P + \lambda L(P)X) + (Q + \lambda L(Q)X) = \alpha L(P) + L(Q) \end{aligned}$$

   Par conséquent, T_λ est un endomorphisme de E.

7. Comme (e_0) est une base de $\mathrm{vect}(e_0)$ et $\mathscr{U}$ est une base de $\mathrm{Ker}(L)$, alors $(e_0) \cup \mathscr{U}$ (concaténation des deux bases) est une base adaptée à $E = \mathrm{vect}(e_0) \oplus \mathrm{Ker}(L)$. Notons $\mathscr{B}'$ cette base, alors $\mathscr{B}' = (f_0, f_1, \ldots, f_{2n})$ avec $f_0 = e_0$, $f_1 = e_1$, remarquons donc que pour tout $k \in [\![1\,;2n]\!]$, $f_k \in \mathrm{Ker}(L)$.
   - $T_\lambda(f_0) = e_0 + \lambda L(e_0)X = e_0 + 2\lambda X = 1 \times f_0 + 2\lambda \times f_1 + 0 \times f_2 + \ldots + 0 \times f_{2n}$.
   - $T_\lambda(f_1) = e_1 + \lambda L(e_1)X = e_1 = 0 \times f_0 + 1 \times f_1 + 0 \times f_2 + \ldots + 0 \times f_{2n}$.
   - Soit $j \in [\![2\,;2n]\!]$, $T_\lambda(f_j) = f_j + \lambda L(f_j)X = f_j = 0 \times f_0 + \ldots + 0 \times f_{j-1} + 1 \times f_j + 0 \times f_{j+1} + \ldots + 0 f_{2n}$.

   Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T_\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 2\lambda & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 1 \end{pmatrix} = I_{2n+1} + 2\lambda E_{2,1}$$

8. Proposons deux méthodes :
   - T_λ est un endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est triangulaire inférieure avec des termes diagonaux non nuls, donc cette matrice est inversible et donc T_λ est un automorphisme de E.

- Soit $P \in \mathrm{Ker}(T_\lambda)$, alors $P + \lambda L(P)X = 0$, donc $P = -\lambda L(P)X$, en notant $\alpha = -\lambda L(P) \in \mathbb{R}$, on obtient, $P = \alpha X$, si $\alpha \neq 0$, alors $X = \dfrac{1}{\alpha}P \in \mathrm{Ker}(T_\lambda)$ (car un noyau est un espace vectoriel), or $T_\lambda(X) = X \neq 0$, ainsi nécessairement $\alpha = 0$, donc $P = 0$ puis $\mathrm{Ker}(T_\lambda) = \{0\}$, par suite T_λ est injective comme c'est un endomorphisme en dimension finie, on en déduit que T_λ est un automorphisme de E.

9. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Proposons deux méthodes :
   - $$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T_\alpha \circ T_\beta) &= \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T_\alpha)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T_\beta) = (I_{2n+1} + 2\alpha E_{2,1}) \times (I_{2n+1} + 2\beta E_{2,1}) \\ &= I_{2n+1} + 2\alpha E_{2,1} + 2\beta E_{2,1} + (2\alpha)(2\beta)E_{2,1}E_{2,1} \\ &= I_{2n+1} + 2(\alpha+\beta)E_{2,1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(T_{\alpha+\beta}) \end{aligned}$$

     Or, l'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est un isomorphisme de E vers $\mathscr{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$, en particulier, cette fonction est injective, donc $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.
   - Soit $P \in E$, alors, par linéarité de L :

     $$\begin{aligned} (T_\alpha \circ T_\beta)(P) &= T_\alpha(T_\beta(P)) = T_\alpha(P + \beta L(P)X) = (P + \beta L(P)X) + \alpha L(P + \beta L(P)X)X \\ &= P + \beta L(P)X + \alpha(L(P) + \beta L(P)L(X))X \\ &= P + (\beta+\alpha)L(P)X + \alpha\beta L(P)L(X)X \underset{L(X)=0}{=} P + (\beta+\alpha)L(P)X = T_{\beta+\alpha}(P) \end{aligned}$$

     Ceci étant valable pour tout $P \in E$, on en déduit que $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$

10. Remarquons que pour tout $P \in E$, $T_0(P) = P$, ainsi, $T_0 = \mathrm{Id}_E$. D'après la question précédente, on en déduit que $T_\lambda \circ T_{-\lambda} = T_0 = \mathrm{Id}_E$, de même $T_{-\lambda} \circ T_\lambda = \mathrm{Id}_E$, ainsi, ${T_\lambda}^{-1} = T_{-\lambda}$

Disco

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

   $$f(\lambda M + M') = f\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix} = (\lambda a + a') + (\lambda c + c') = \lambda(a + c) + (a' + c') = \lambda f(M) + f(M')$$

   Par conséquent, f est linéaire.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$.

   $$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(M) = 0 \iff a + d = 0 \iff d = -a \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &\iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff M \in \mathrm{vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1}) \end{aligned}$$

   Par équivalence, on a montré que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$. On a noté $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de E. Ainsi, $\mathscr{B}_K = (E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, supposons $a(E_{1,1} - E_{2,2}) + bE_{1,2} + cE_{2,1} = 0_2$. On obtient donc $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = 0_2$. Par identification, on obtient $a = b = c = 0$. Ainsi, la famille $\mathscr{B}_K$ est libre. On a donc démontré que $\mathscr{B}_K$ était une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Notons $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et $\mathscr{C} = (1)$ la base canonique de $\mathbb{C}$. Alors, comme $f(E_{1,1}) = 1$, $f(E_{1,2}) = 0$, $f(E_{2,1}) = 0$ et $f(E_{2,2}) = 1$, on a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = (1, 0, 0, 1)$

4. Soit $M \in G \cap \mathrm{Ker}(f)$. Alors $M \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. De plus, $M \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(M) = 0$. Ainsi, $\lambda + \lambda = 0$. Donc $2\lambda = 0$, puis $\lambda = 0$, ainsi, $M = 0I_2 = 0_2$. On a ainsi prouvé que $G \cap K \subset \{0_2\}$. Comme ce sont des SEV, l'inclusion réciproque est toujours vraie. Ainsi, $G \cap K = \{0_2\}$, dès lors, G et K sont en somme directe.

   De plus, par définition de G, (I_2) est une famille génératrice de G, et c'est une famille libre (un seul vecteur non nul). D'où (I_2) est une base de G, donc $\dim(G) = 1$.

   Alors, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(G) = 3 + 1 = 4 = \dim(E)$, comme $\mathrm{Ker}(f)$ et G sont en somme directe, cela suffit pour que $\mathrm{Ker}(f)$ et G soient supplémentaires dans E.

5. Comme $E = G \oplus \mathrm{Ker}(f)$, il existe un unique couple $(A, K) \in G \times \mathrm{Ker}(f)$ tel que $M = A + K$. Comme $A \in G = \mathrm{vect}(I_2)$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $A = \lambda I_2$. Et comme $K \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ avec $\alpha + \delta = 0$. Donc $\delta = -\alpha$. Ainsi, $N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix}$. En sachant que $M = A + K$ on a donc

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \lambda & \beta \\ \gamma & \lambda - \alpha \end{pmatrix}$$

   Par identification, on obtient

$$\begin{cases} \gamma &= c \\ \beta &= b \\ \alpha + \lambda &= a \\ \lambda - \alpha &= d \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_4}{\iff} \begin{cases} \gamma &= c \\ \beta &= b \\ \lambda &= \dfrac{a+d}{2} \\ \lambda - \alpha &= d \end{cases}$$

   Ainsi, $p(M) = A = \lambda I_2 = \dfrac{a+d}{2} I_2$.

6. Rappelons que la base canonique de E est $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. En utilisant la question précédente :
   - $p(E_{1,1}) = p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} I_2 = \dfrac{1}{2} E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + \dfrac{1}{2} E_{2,2}$.
   - $p(E_{1,2}) = p\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0I_2 = 0E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2}$.
   - $p(E_{2,1}) = p\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0I_2 = 0E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + 0E_{2,2}$.
   - $p(E_{2,2}) = p\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2} I_2 = \dfrac{1}{2} E_{1,1} + 0E_{1,2} + 0E_{2,1} + \dfrac{1}{2} E_{2,2}$.

   Ainsi,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

7. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$, alors $AB = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$, ainsi

$$f(AB) = (aa' + bc') + (cb' + dd') = aa' + bc' + cb' + dd'$$

   De même, $BA = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}$, ainsi,

$$f(BA) = (a'a + b'c) + (c'b + d'd) = aa' + bc' + cb' + dd' = f(AB)$$

8. Prenons, par exemple [1], $A = B = I_2$, on a alors

$$f(AB) = f(I_2 \times I_2) = f(I_2) = 2 \qquad \text{et} \qquad f(A)f(B) = f(I_2)f(I_2) = 2 \times 2 = 4 \neq 2 = f(AB)$$

Ainsi, la proposition «pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})^2$, $f(AB) = f(A)f(B)$» est fausse [2].

9. Soit $C \in \mathcal{E}$. Il existe $(A, B) \in E^2$ tel que $C = AB - BA$. Comme f est linéaire, il vient

$$f(C) = f(AB - BA) = f(AB) - f(BA)$$

De plus, d'après la question 7, $f(BA) = f(AB)$, ainsi, $f(C) = f(AB) - f(AB) = 0$. On a donc prouvé que $C \in \mathrm{Ker}(f)$ et ce pour tout $C \in \mathcal{E}$. Dès lors, $\mathcal{E} \subset \mathrm{Ker}(f)$.

10. Supposons que $I_2 \in \mathcal{E}$, alors $I_2 \in \mathrm{Ker}(f)$ d'après la question précédente. Donc $2 = f(I_2) = 0$. Ceci est absurde, donc $I_2 \notin \mathcal{E}$.

11. Posons l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(p)$: «$A^pB - BA^p = \alpha p A^p$».
    - Pour $p = 0$, on a $A^0B - BA^0 = I_2B - BI_2 = B - B = 0_2 = \alpha 0 A^0$. Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
    - Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(p)$ vraie. Alors

    $$\begin{aligned} A^{p+1}B - BA^{p+1} &= A(A^pB) - BA^{p+1} = A(\alpha p A^p + BA^p) - BA^{p+1} \\ &= \alpha p A^{p+1} + (AB - BA)A^p = \alpha p A^{p+1} + \alpha A A^p = \alpha(p+1)A^{p+1} \end{aligned}$$

    Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vraie.
    - Par principe de récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^pB - BA^p = \alpha p A^p$.

12. Comme $AB - BA = \alpha A \in \mathcal{E} \subset \mathrm{Ker}(f)$, on a $\alpha A \in \mathrm{Ker}(f)$. Or $\mathrm{Ker}(f)$ est un espace vectoriel et $\alpha \neq 0$, ainsi, $\alpha^{-1}(\alpha A) \in \mathrm{Ker}(f)$. D'où $A \in \mathrm{Ker}(f)$. De plus, d'après la question précédente, $A^2B - BA^2 = 2\alpha A^2 \in \mathcal{E} \subset \mathrm{Ker}(f)$. Donc $2\alpha A^2 \in \mathrm{Ker}(f)$. De même, comme $2\alpha \neq 0$, on a $(2\alpha)^{-1}(2\alpha A^2) \in \mathrm{Ker}(f)$. Donc $A^2 \in \mathrm{Ker}(f)$. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, comme $A \in \mathrm{Ker}(f)$, $a + d = 0$. Donc $d = -a$. Ainsi, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$. En calculant A^2, on obtient $A^2 = \begin{pmatrix} -a^2 - bc & 0 \\ 0 & -a^2 - bc \end{pmatrix}$. Or, comme $f(A^2) = -2(a^2 + bc) = 0$. On en déduit que $a^2 + bc = 0$. Donc $A^2 = 0_2$. Dès lors, A est une matrice nilpotente. [3]

13. Après calculs [4] :
    - $E_{1,2} = E_{1,2} \times E_{2,2} - E_{2,2} \times E_{1,1} \in \mathcal{E}$.
    - $E_{2,1} = E_{2,1} \times E_{1,1} - E_{1,1} \times E_{2,1} \in \mathcal{E}$.
    - $E_{1,1} - E_{2,2} = E_{1,2}E_{2,1} - E_{2,1} \times E_{1,1} \in \mathcal{E}$.

14. Soit $M \in \mathrm{Ker}(f)$, alors il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.
    - Si $a \neq 0$, alors, on pose $A = \begin{pmatrix} -c/a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$. Alors $AB - BA = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c & a \end{pmatrix} = M \in \mathcal{E}$.
    - Si $a = 0$, alors $M = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. On pose alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix}$. Alors $AB - BA = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 2c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ c & 0 \end{pmatrix} = M \in \mathcal{E}$.

15. Soit $(M, N) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\Phi_A(\lambda M + N) = f(A(\lambda M + N)) = \lambda f(AM) + f(AN) = \lambda \Phi_A(M) + \Phi_A(N)$$

Ainsi, Φ_A est linéaire, de plus pour tout $M \in E$, $f(AM) \in \mathbb{R}$, d'où $\Phi_A \colon E \to \mathbb{R}$. Par conséquent, $\Phi_A \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$.

---

1. Rappelons que pour montrer que la proposition «Pour tout $A \in E$, pour tout $B \in E$, $f(AB) = f(A)f(B)$» est fausse, il suffit de trouver un exemple de $A \in E$ et $B \in E$ tel que $f(AB) \neq f(A)f(B)$.
2. On aurait pu prendre bien d'autres exemples : $A = E_{1,1}$ et $B = E_{2,2}$.
3. On peut montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $AB - BA = \alpha A$ et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ implique que A est nilpotente en taille $n \in \mathbb{N}^*$, mais c'est plus compliqué.
4. Il faut connaître la formule du produit des matrices élémentaires : $E_{a,b} \times E_{c,d} = \delta_{b,c}E_{a,d}$ (avec $\delta_{b,c}$ le symbole de Kronecker).

16. On a déjà montré à la question précédente que pour tout $A \in A$, $\Phi_A \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$. Soit $(A, B) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Le but est donc de montrer que $\Phi(\lambda A + B) = \lambda\Phi(A) + \Phi(B)$. Comme ce sont des fonctions, nous allons calculer l'image par $M \in E$ de ces fonctions[5] :

    $$\Phi_{\lambda A+B}(M) = f((\lambda A+B)M) = f(\lambda AM+BM) = \lambda f(AM)+f(BM) = \lambda\Phi_A(M)+\Phi_B(M) = (\lambda\Phi_A+\Phi_B)(M)$$

    Et ce pour tout $M \in E$. Cela montre que $\Phi_{\lambda A+B}$ et $\lambda\Phi_A + \Phi_B$ sont des fonctions égales :

    $$\Phi(\lambda A + B) = \lambda\Phi(A) + \Phi(B)$$

    Ainsi, Φ est linéaire.

    Montrons que Φ est injective. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. Donc $\Phi_A = \Phi(A) = 0_{\mathscr{L}(E,\mathbb{C})}$ (fonction nulle de E dans $\mathbb{C}$). Ainsi, Φ_A est la fonction nulle. Donc pour tout $M \in E$, $\Phi_A(M) = 0$. Donc[6] pour tout $M \in E$, $f(AM) = 0$.
    - Pour $M = E_{1,1}$, on obtient $a = 0$
    - Pour $M = E_{1,2}$, on obtient $c = 0$
    - Pour $M = E_{2,1}$, on obtient $b = 0$
    - Enfin, pour $M = E_{2,2}$, on obtient, $d = 0$.

    Ainsi, $A = 0_2$. Il s'ensuit $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \{0_2\}$, comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, Φ est injective.
    De plus, $\dim(\mathscr{L}(E, \mathbb{C})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{C}) = \dim(E) \times 1 = \dim(E)$. Ainsi, Φ est une application linéaire injective entre espaces vectoriels de même dimension finie, d'après le cours $\Phi\colon E \to \mathscr{L}(E, \mathbb{C})$ est donc un isomorphisme.

Ainsi, comme $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{C})$ (φ est donc un élément de l'ensemble d'arrivée de Φ), il existe une unique matrice $A \in E$ telle que $\varphi = \Phi(A) = \Phi_A$.

5. Rappelons que pour des fonctions $f\colon E \to F$ et $g\colon E \to F$, on a $f = g$ si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.

6. Une autre méthode consiste à prendre $M = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$ ainsi, $0 = f(AM) = |a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 0$ donc $a = b = c = d = 0$.