CB

7 Mai 2024

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les problèmes dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer les numéros de chaque question.

Algèbre : un problème semblable à tant d'autres

Étude d'un exemple

Cette partie est indépendante du reste du problème. Dans cette partie seulement, on pose la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (x, -z, y + 2z) \end{cases}$$

1. Vérifier que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
3. Déterminer M, la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ notée $\mathscr{B}$.
4. **À l'aide d'un déterminant**, montrer que $\mathscr{B}' = ((1, 0, 0), (0, -1, 1), (0, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
5. Déterminer les coordonnées de $(0, -1, 2)$ dans $\mathscr{B}'$ puis déterminer T la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
6. À l'aide d'une certaine matrice inversible P, donner une relation entre M et T. Expliciter P et P^{-1}.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer T^n puis calculer M^n.

Généralités

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3, $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et I_3 la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
Rappelons la définition d'être semblable : soit $(A, B) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})^2$, on dit que A est semblable à B s'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PBP^{-1}$.

8. Dans cette question, on va démontrer quelques propriétés sur les matrices semblables :
   (a) Démontrer que A est semblable à A.
   (b) Démontrer que si A est semblable à B, alors B est semblable à A.
   (c) Démontrer que si A est semblable à B et B semblable à C, alors A est semblable à C.
   (d) Démontrer que si A est semblable à B, alors $\det(A) = \det(B)$.
   (e) Énoncer la contraposée du résultat démontré à la question 8d.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ quelconque. On pose $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = PTP^{-1}$.

Le but de tout ce problème est de montrer que A est semblable à A^{-1}.

9. Justifier que T et A sont inversibles mais pas N.
10. Calculer N^3 puis montrer que $T^{-1} = I_3 - N + N^2$. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de I_3, P, N et P^{-1}.
11. On suppose, **dans cette question seulement**, que $N = 0_3$, montrer que A est semblable à A^{-1}.

Un détour par le théorème du rang

12. Énoncer le théorème du rang pour une application linéaire.

Dans toute la suite, E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3. Pour u un endomorphisme de E et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u$ (n fois). On note 0_E le vecteur nul de E et 0 l'endomorphisme nul de E.

13. Soit u un endomorphisme de E et soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. On considère $w \in \mathscr{L}(\operatorname{Ker}(u^{i+j}), E)$ définie par, pour tout $x \in \operatorname{Ker}(u^{i+j})$, $w(x) = u^j(x)$ (autrement dit, $w = u^j{}_{|\operatorname{Ker}(u^{i+j})}$)
   (a) Montrer que $\operatorname{Im}(w) \subset \operatorname{Ker}(u^i)$.
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker}(w) \subset \operatorname{Ker}(u^j)$.
   (c) En déduire que $\dim(\operatorname{Ker}(u^{i+j}) \leqslant \dim(\operatorname{Ker}(u^i)) + \dim(\operatorname{Ker}(u^j))$.
14. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg}(u) = 2$.

(a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$.

(b) Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2$ (on pourra appliquer deux fois la question 13c).

(c) Montrer que l'on peut trouver un vecteur a non nul de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et montrer que $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

(d) Déterminer alors U la matrice de u et V la matrice de $u^2 - u$ dans cette base.

15. Soit u un endomorphisme de E vérifiant $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(u) = 1$.

(a) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(u)$.

(b) Justifier que l'on peut trouver un vecteur non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

(c) Justifier l'existence de c un vecteur de $\mathrm{Ker}(u)$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre puis montrer que $(b, u(b), c)$ est une base de E.

(d) Déterminer alors U' la matrice de u et V' la matrice de $u^2 - u$ dans cette base.

16. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

(a) Montrer que la matrice N est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{rg}(M)$.

(c) Montrer que M est semblable à N.

(d) Montrer que A est semblable à A^{-1}.

17. On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$. On pose $M = N^2 - N$. Montrer que A est semblable à A^{-1}.

Comme N n'est pas inversible, $\mathrm{rg}(N) = \{0, 1, 2\}$ et par disjonction de cas, grâce aux questions 11, 16 et 17, on a montré que la matrice A est semblable à A^{-1}. En particulier, la matrice M de l'exemple est semblable à son inverse.

18. Réciproquement, toute matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Analyse : Kevin trouve que les suites c'est fun !

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

1. En justifiant la dérivabilité de f, calculer f'.
2. À l'aide de la fonction $g\colon x \mapsto (1 - x)\mathrm{e}^x + 1$, montrer que f' s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}_+$. On note α ce réel, et on montrera que $\alpha \in \,]\,1\,;2\,[$.
3. Écrire une fonction complète en Python `Dichotomie(epsilon)` qui renvoie une approximation de α à epsilon près où epsilon>0.
   On pourra utiliser la fonction `exp` de la bibliothèque `numpy` à condition d'avoir correctement appelé cette fonction.
4. Montrer que $f(\alpha) = \alpha - 1$.
5. Établir le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
6. En déduire la position de f par rapport à sa tangente en 0.
7. Donner le tableau de variation de f ainsi que sa représentation graphique.
8. Soit un entier $n \geqslant 2$. En utilisant que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \times (e^x + 1) = x$, donner une expression de $f^{(n)}$ en fonction des dérivées k-ièmes de f pour $k < n$.

Ainsi, on pourrait facilement calculer f'' et f''', on ne demande pas de faire un tel calcul.

9. Démontrer que f réalise une bijection de $[\,0\,;\alpha\,]$ vers un ensemble à déterminer noté J.

On note h la bijection réciproque de $f_{|[\,0\,;\alpha\,]}\colon [\,0\,;\alpha\,] \to J$.

10. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in [\,0\,;\alpha\,]$ tel que $f(u_n) = \dfrac{\alpha - 1}{n}$.
11. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.
12. Démontrer que $(u_n)_n$ converge et déterminer sa limite ℓ.
13. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 de h, déterminer un équivalent simple de u_n en 0.

Soit $k\colon x \mapsto 1 + \mathrm{e}^{-x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

14. Montrer que α est l'unique solution de l'équation $k(x) = x$.
15. Montrer que $\alpha - 1 < \mathrm{e}^{-1}$.
16. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $|k(x) - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-1}|x - \alpha|$
17. On pose $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = k(v_n)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \alpha| \leqslant \mathrm{e}^{-(n+1)}$.
18. D'après ce qui précède, écrire un second algorithme Python qui donne une approximation de α à ε près.
19. Lequel de ces deux algorithmes est le plus rapide pour donner une approximation de α à ε ?