Chapitre 19

Probabilités

Table des matières

1 Univers, évènements, variable aléatoire

Définition : vocabulaire probabiliste

Soit Ω un ensemble fini que l'on appelle **univers**.

1. Un sous-ensemble de Ω est appelé **évènement**. L'ensemble de tous les évènements est donc $\mathscr{P}(\Omega)$.
2. Les singletons de Ω sont appelés **évènements élémentaires**.
3. L'évènement Ω est appelé **évènement certain**, l'évènement $\varnothing$ est appelé **évènement impossible**.
4. Si A et B sont deux évènements, $A \cup B$ (reps. $A \cap B$) est appelé évènement «A ou B», (resp. «A et B»).
5. Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les évènements A et B sont **incompatibles**.
6. L'évènement $\overline{A}$ est appelé **évènement contraire** de A».

Exemple 1.
- On lance un dé à six faces, qui est Ω ? quelles sont les évènements élémentaires ? quel est l'évènement «le résultat est pair» ?
- On lance n fois un dé et on note S_k l'évènement «le dé a fait un six lors du k-ième lancer». Donner Ω, écrire explicitement S_k. Écrire, en fonction de S_k les évènements «on a obtenu un six lors des deux premiers lancers», «on a obtenu un six à chaque lancer», «on n'a jamais obtenu un six», «on a obtenu au moins une fois un six», «on a obtenu au moins deux six d'affilée».

Définition d'un système complet d'événements

Un **système complet d'évènements** est formé d'évènements A_1, A_2, ..., A_p deux à deux incompatibles tels que $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$.

Exemple 2. Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, alors les évènements $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, ..., $\{\omega_n\}$ forment un système complet d'évènements.

Exemple 3. Les évènements «la face du dé est pair» et «la face du dé est impair» forment un système complet d'évènement.

Définition d'une variable aléatoire

Une application $X : \begin{cases} \Omega \longrightarrow E \\ \omega \longmapsto X(\omega) \end{cases}$ où E est un ensemble est appelée **variable aléatoire** sur Ω à valeurs dans E

.

Remarque 1. On remarque *malicieusement* qu'une variable aléatoire n'est n'a rien d'aléatoire et n'a rien d'une variable...

Exemple 4.
1. On lance deux dés et on note X_1 : somme des résultats obtenus.
2. On lance n dés et on note X_2 : nombre de 6 obtenus.
3. On tire au hasard simultanément 3 boules d'une urne qui contient 3 boules blanches et 3 rouges et on note X_3 : nombre de boules rouges.

À partir de maintenant $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire.

Définition vocabulaire

1. $X(\Omega) = \{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\}$ est appelé **univers image**.
2. Soit $B \subset E$, on note l'évènement $(X \in B) = \{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) \in B\}$.
3. Pour $x \in E$, on note l'évènement $(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x\}$.
4. Si $E = \mathbb{R}$, on note l'évènement $(X < x) = X^{-1}(]-\infty\,; x\,[) = \{\omega \in \Omega,\ X(\omega) < x\}$, idem pour $(X \geqslant x)$ etc.

Exemple 5. Déterminer l'univers image pour les trois variables aléatoires définies précédemment. Déterminer les évènements $(X_1 = 7)$, puis $(X_2 = 0)$

2 Espaces probabilisés

Définition d'une probabilité sur un univers fini

Une application $\mathbb{P}\colon \mathscr{P}(\Omega) \to [\,0\,;1\,]$, telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, si $A \cap B = \varnothing$, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ est appelée probabilité sur Ω. Le couple $(\Omega, \mathbb{P})$ est appelé **espace probabilisé**.

Exemple 6. L'application $\mathbb{P}\colon A \mapsto |A|/|\Omega|$ est une probabilité sur Ω, appelée **probabilité uniforme sur** Ω.

Remarque 2. Il faut bien comprendre que ce qui compte, ce n'est pas tant l'ensemble Ω, mais bien la probabilité qu'on attribue aux évènements. Par exemple, si on lance un dé, $\Omega = [\![\,1\,;6\,]\!]$, si le dé est équilibré alors $\mathbb{P}$ sera la probabilité uniforme, mais sinon ce sera une autre probabilité.

Définition d'une distribution de probabilités

Une **distribution de probabilité** sur $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ est une famille de réels positifs $(p_1, \dots, p_n)$ de somme 1.

Proposition n° 1 : une probabilité est entièrement caractérisée par sa distribution de probabilité

Soit une distribution de probabilité $(p_1, \dots, p_n)$ sur Ω. Il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ telle que $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout $i \in [\![\,1\,;n\,]\!]$.

Exemple 7. Considérons un dé et donc $\Omega = [\![\,1\,;6\,]\!]$, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = 1/12$ et $p_6 = 7/12$, alors il existe une probabilité tel que la probabilité de tirer six soit 7/12 contre 1/12 pour les autres faces.

À partir de maintenant, $(\Omega, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé.

Proposition n° 2 : propriétés des probabilités

Soit A, B, A_1, …, A_n des évènements.

1. $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
2. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
3. $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - P(A \cap B)$
4. Si $B \subset A$ alors $\mathbb{P}(A \backslash B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)$
5. Si $B \subset A$, alors $\mathbb{P}(B) \leqslant \mathbb{P}(A)$ (croissance)
6. $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
7. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$
8. Si $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux incompatibles, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

3 Probabilité conditionnelle

Définition d'une probabilité conditionnelle

Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, on définit la **probabilité conditionnelle** de A sachant B par $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Exemple 8. On lance un dé à six faces équilibré, quelle est la probabilité de tirer un nombre pair sachant que l'on a tiré un nombre premier ?

Proposition n° 3 : la probabilité conditionnelle est une probabilité
Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}_B$ est une probabilité.

Remarque 3. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors on a toujours $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)$.
Si $\mathbb{P}(B) = 0$, on pose, par convention, $\mathbb{P}(A|B) = 0$, ainsi la relation $\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)$ reste vraie.

Théorème n° 1 : formule des probabilités totales
Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'évènements. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Exemple 9. On tire deux boules successivement et sans remise d'une urne contenant x boules rouges et y boules bleues. Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit bleue ?

Théorème n° 2 : formules des probabilités composées
Soient $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et une famille d'évènements $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2)\mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1}}(A_n) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{\bigcap_{i=1}^{k} A_i}(A_{k+1})$$

Exemple 10. On tire successivement et sans remise trois billes d'une urne contenant x billes rouges et y bleues. Quelle est la probabilité que les deux premières soient rouges mais pas la dernière ?

Théorème n° 3 : formule de Bayes
Soit B un évènement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A)\mathbb{P}_A(B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Exemple 11. Supposons qu'une personne sur mille soit atteinte par une maladie, et que l'on ait un test pour savoir si un patient est infecté :

- Si le patient est malade, le résultat sera positif avec une probabilité de 99/100.
- Si un patient est sain, le résultat sera négatif avec une probabilité de 95/100 .

Supposons que le test d'un patient soit positif, quelle est la probabilité qu'il soit vraiment malade ?

4 Loi d'une variable aléatoire

4.1 Définition et propriétés

Proposition n° 4 : système complet d'événements associé à une variable aléatoire
Soit une VA $X : \Omega \to E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, alors $((X = e_1), \ldots, (X = e_n))$ est un SCE appelé SCE des valeurs possibles de X. En particulier, $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = e_i) = 1$ pour $A \subset E$, $\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{e \in A} \mathbb{P}(X = e)$
$\mathbb{P}_X : A \mapsto \mathbb{P}(X \in A)$ est une probabilité et est déterminée par $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in E}$.

Démonstration de la proposition n° 4 : Notons $E = \{x_1, \dots, x_p\}$ et posons $A_i = (X = x_i)$, pour $i \in [\![1\,;p]\!]$. Fixons $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Soit $\omega \in A_i \cap A_j$, alors $\omega \in A_i$ et $\omega \in A_j$. Donc, $X(\omega) = x_i$ et $X(\omega) = x_j$, par conséquent $x_i = x_j$. Or, comme $i \neq j$, $x_i \neq x_j$. Ainsi, $A_i \cap A_j = \varnothing$. De plus, soit $\omega \in \Omega$. Il existe alors existe $j \in [\![1\,;n]\!]$, tel que $x_j = X(\omega)$, donc $\omega \in (X = x_j)$, ainsi, $\omega \in A_j \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$, d'où $\omega \in \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$. On a donc démontré que $\Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$. Comme l'inclusion réciproque est vraie, on a bien $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$. Comme les intersections deux à deux sont disjointes, on a bien un SCE.

Ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{p} \mathbb{P}((X = x_i)) = \sum\limits_{i=1}^{p} \mathbb{P}(A_i) = 1$. Et d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}((X \in B) \cap (X = x_i))$$

Calculons $(X \in B) \cap (X = x_i)$.

- Si $x_i \notin B$, alors prenons $\omega \in (X \in B) \cap (X = x_i)$, ainsi $X(\omega) \in B$ et $X(\omega) = x_i \notin B$, ce qui est impossible, donc $(X \in B) \cap (X = x_i) = \varnothing$, ainsi $\mathbb{P}((X \in B) \cap (X = x_i)) = 0$.
- Si $x_i \in B$, alors $(X = x_i) \subset (X \in B)$, dès lors, $(X \in B) \cap (X = x_i) = (X = x_i)$. Ainsi, $\mathbb{P}((X \in B) \cap (X = x_i)) = \mathbb{P}((X = x_i))$.

Ainsi $\mathbb{P}(X \in B) = \sum\limits_{i=1}^{p} \mathbb{P}((X \in B) \cap (X = x_i)) = \sum\limits_{x_i \in B} \mathbb{P}(X = x_i)$. ■

Définition de la loi de probabilité

Soit X une variable aléatoire de $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans E. La loi de X est la famille $(\mathbb{P}_X(\{x\}))_{x \in E}$.

Remarque 4. Trouver la loi de probabilité de X revient à déterminer la valeur de $\mathbb{P}(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.

Exemple 12. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X_1 définie précédemment.

Remarque 5. Étant donnée une distribution de probabilités sur $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ notée $(p_1, \dots, p_n)$, il existe une variable aléatoire X une variable aléatoire définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et à valeurs dans E telle que $\mathbb{P}(X = e_i) = p_i$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

Exemple 13. Ainsi, il existe une variable aléatoire réelle X sur Ω tel que $\mathbb{P}(X = 0) = 1/2$, $\mathbb{P}(X = 1) = 1/4$ et $\mathbb{P}(X = 2) = 1/4$ sans avoir à définir X ou Ω. D'ailleurs, souvent, cela ne nous importera peu.

Définition de deux variables aléatoires de même loi

Si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$, alors on note $X \sim Y$

Exemple 14. Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ (on dit que X est une VA de Rademacher), quelle est la loi de $Y = -X$?

Attention : avoir la même loi ne veut pas dire être égales

Si $X \sim Y$, cela ne signifie pas que $X = Y$

Définition de l'image d'une variable aléatoire

Soit $f\colon E \to F$. Alors $f \circ X$, est une nouvelle VA, notée $f(X)$ et appelée **variable aléatoire image**.

Proposition n° 5 : probabilité de l'image d'une variable aléatoire

Soient X une variable sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et $f\colon E \to F$ et $Y = f \circ X = f(X)$ alors : $Y(\Omega) = f(X(\Omega))$ et

$$\forall y \in Y(\Omega) \qquad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \mathbb{P}(X = x)$$

Démonstration de la proposition n° 5 : Notons $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned} y \in Y(\Omega) &\iff \exists \omega \in \Omega \quad y = Y(\omega) = f(X(\omega)) \\ &\iff \exists \omega \in \Omega \quad \exists i \in [\![1 ; p]\!] \quad X(\omega) = x_i \quad y = f(x_i) \\ &\iff \exists i \in [\![1 ; p]\!] \quad y = f(x_i) \quad \iff \quad y \in \{f(x_1), \dots, f(x_p)\} \end{aligned}$$

Dès lors, $Y(\Omega) = \{f(x_1), \dots, f(x_p)\}$. Soit $y \in \Omega$, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}((Y = y) \cap (X = x_i)) = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{P}((f(X) = y) \cap (X = x_i))$$

Calculons $\mathbb{P}(f(X) = y) \cap (X = x_i))$

- Si $f(x_i) \neq y$. Soit $\omega \in (f(X) = y) \cap (X = x_i)$, alors $X(\omega) = x_i$, et $y = f(X(\omega)) = f(x_i) \neq y$ ce qui est impossible, donc $(f(X) = y) \cap (X = x_i) = \varnothing$. Par conséquent, $\mathbb{P}((f(X) = y) \cap (X = x_i)) = 0$.
- Si $f(x_i) = y$. Remarquons que $(f(X) = y) \cap (X = x_i)) \subset (X = x_i)$. Réciproquement, soit $\omega \in (X = x_i)$, alors $X(\omega) = x_i$, et $f(X(\omega)) = f(x_i) = y$, donc $\omega \in (f(X) = y)$. Ainsi, $\omega \in (X = x_i) \cap (f(X) = y)$, on a ainsi montré l'inclusion $(X = x_i) \subset (f(X) = y) \cap (X = x_i)$. Par double inclusion, il vient $(f(X) = y) \cap (X = x_i) = (X = x_i)$, ainsi $\mathbb{P}((f(X) = y) \cap (X = x_i)) = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Ainsi, $\mathbb{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{\substack{i=1 \\ \text{si } f(x_i) = y}}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)$. ■

Exemple 15. On reprend l'exemple de X_3. On associe un gain algébrique à ce tirage nommé G : on gagne 2 euros par boule rouge obtenue et on perd 1 euro par boule non rouge. Définir G en fonction de X_3 et déterminer $G(\Omega)$ ainsi que sa loi. Idem si on considère que le gain est donné par : le carré de la différence entre un et nombre de boules rouges.

4.2 Lois usuelles

Définition de la loi uniforme (modélise le tirage au hasard de façon équitable)

Soit X une variable de $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans un ensemble fini E On dit que X suit une **loi uniforme** sur E si pour tout $e \in E$, $\mathbb{P}(X = e) = \dfrac{1}{|E|}$. On note $X \sim \mathscr{U}(E)$.

Exemple 16. Si $X \sim \mathscr{U}([\![1 ; n]\!])$, alors $k \in [\![1 ; n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$

Définition de la loi de Bernoulli (modélise une expérience à 2 issues)

On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre $p \in [\,0 ; 1\,]$ si $\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{P}(X = 1) & = & p \\ \mathbb{P}(X = 0) & = & 1 - p \end{array} \right.$. On note $X \sim \mathscr{B}(p)$.

Définition d'une loi binomiale (compte les succès dans n VA de Bernoulli indépendantes)

Si pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$, $\mathbb{P}(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$, on dit que X suit une loi **binomiale** de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\,0 ; 1\,]$. On note $X \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Remarque 6. Si une variable X compte le nombre de succès de n VA de Bernoulli indépendantes et de paramètre p, alors $X \sim \mathscr{B}(n, p)$ où p est la probabilité de succès à chaque expérience (sera démontré plus tard).

Exemple 17. Soit une urne qui contient 10 blanches, 3 rouges et 12 noires. On tire au hasard, successivement et avec remise, 7 boules. On note X la VA qui compte le nombre de boules rouges obtenues. Quelle est la loi de X ?

4.3 Couple de variables aléatoires

Soient X (resp. Y) une VA définis sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans E (resp. F).

Définition de la loi conjointe

Le couple (X, Y) est une variable à aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E \times F$. La **loi conjointe** de X et Y est la loi du couple (X, Y) : $\begin{cases} X(\Omega) \times Y(\Omega) \longrightarrow [\,0\,;1\,] \\ \quad (x, y) \quad\quad \longmapsto \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \end{cases}$.

Remarque 7. Si $p = |E|$ et $q = |F|$ sont petits, alors on consigne la loi conjointe dans un tableau à p lignes et q colonnes.

Remarque 8. On note $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$.

Exemple 18. On lance deux dés équilibrés et de façon indépendante et on note X le plus grand nombre obtenu et Y le plus petit, donner la loi conjointe de (X, Y).

Attention à l'univers image

Ce n'est pas parce que x est une issue de X et que y est une issue de Y que (x, y) est une issue de (X, Y) : $(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ mais il n'y a pas forcément égalité.

Définition de la loi marginale

On appelle **première loi marginale** de (X, Y) la loi de X, **seconde loi marginale** de (X, Y) la loi de Y.

Proposition n° 6 : calcul des lois marginales en fonction de la loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de VA, alors la loi marginale de X est donnée par (idem pour Y) :

$$\forall x \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$$

Exemple 19. Calculer la loi marginale de X dans l'exemple précédent.

Remarque 9. Étant donnée la loi conjointe, on peut calculer les lois marginales, par contre, les lois marginales seules ne suffisent pas à retrouver la loi conjointe.

Exemple 20. Donner deux exemples de variables aléatoires (X, Y) tels que les lois marginales soient des lois uniformes sur $\{0; 1\}$.

Définition loi conditionnelle de X sachant un évènement A

Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ à valeurs dans E et A un évènement de Ω tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant que A l'application $x \mapsto \mathbb{P}(X = x | A) = \dfrac{\mathbb{P}((X = x) \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$ définie sur E et à valeurs dans $[\,0\,;1\,]$.

Exemple 21. En conservant l'exemple précédent, calculer la loi de X sachant l'évènement $Y = 3$.

4.4 Généralisation à un n-uplet de variables aléatoires

Définition de la loi d'un n-uplet

Soit $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-uplet de VA, on appelle loi conjointe de $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ la loi de X :

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)$$

Étant donnée la loi de X, on appelle i-ième loi marginale la loi de X_i.

Remarque 10. Si $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est un n-uplet de VA, alors la i-ième marginale de X est :

$$\mathbb{P}(X_i = x_i) = \sum_{(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \ldots, X_n = x_n)$$

5 Indépendance

5.1 Indépendance de deux évènements

Définition de l'indépendance de deux évènements

Soient A et B deux évènements, on dit que A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Remarque 11. Lorsque $\mathbb{P}(B) > 0$, alors A et B sont indépendants ssi $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$. Ainsi, la probabilité d'obtenir A est la même si on sait que B est réalisé.

Proposition n° 7 : indépendance des évènements complémentaires

Si A et B sont indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi, de même pour $\overline{A}$ et B, de même $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

5.2 Indépendance de n évènements

Définition de l'indépendance de n évènements

On dit que les évènements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants si $\quad \forall J \subset [\![1 ; n]\!] \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$

Exemple 22. Si $n = 2$ ou $n = 3$ quelle(s) vérifications faut-il faire pour démontrer que les évènements sont indépendants ?

Remarque 12. Si les événements $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ sont indépendants, alors toute sous-famille l'est aussi.

Péril imminent l'indépendance de n évènements n'est pas l'indépendance deux à deux

Il est possible que A_1 et A_2 soient indépendants, de même entre A_2 et A_3 de même qu'entre A_1 et A_3 sans que A_1, A_2 et A_3 soient indépendants.

Exemple 23. Soit $\Omega = [\![0 ; 3]\!]$ muni de sa probabilité uniforme, on note $A_1 = \{0, 1\}$, $A_2 = \{1, 2\}$ et $A_3 = \{0, 2\}$, montrer que A_1 et A_2 sont indépendants, de même A_1 et A_3 puis A_2 et A_3 mais que A_1, A_2 et A_3 ne sont pas indépendants.

Proposition n° 8 : indépendance des évènements complémentaires

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des évènements indépendants et $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$, alors $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont indépendants.

5.3 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition de l'indépendance de 2 variables aléatoires

On dit que deux VA, définies sur Ω, X et Y sont **indépendantes** (noté $X \perp\!\!\!\perp Y$) si :

$$\forall A \subset X(\Omega) \quad \forall B \subset Y(\Omega) \qquad \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$$

Proposition n° 9 : équivalence de l'indépendance

$X \perp\!\!\!\perp Y$ ssi $\forall (x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \qquad \mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)) = \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y)$

Démonstration de la proposition n° 9 : Supposons que pour tout $(A,B) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. Alors, pour $(x,y) \in X(\omega) \times Y(\Omega)$, on pose $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, on a alors $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, soit $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$. D'où

$$\mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)) = \mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$$

Réciproquement, que pour tout $x \in X(\Omega)$ et $y \in Y(\Omega)$, $\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$. Soit $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) &= \sum_{(x,y) \in A \times B} \mathbb{P}((X=x) \cap (Y=y)) \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} \mathbb{P}(X=x) \times \mathbb{P}(Y=y) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X=x) \sum_{y \in A} \mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)\end{aligned}$$

■

Proposition n° 10 : indépendance de variables aléatoires images

Si $f \colon X(\Omega) \to E$ et $g \colon Y(\Omega) \to E$, et $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\qquad f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

Démonstration de la proposition n° 10 : Soit $x \in E$ et $y \in Y$. Alors

$$\mathbb{P}((f(X)=x) \cap (g(Y)=y)) = \mathbb{P}((X \in f^{-1}(\{x\})) \cap (Y \in g^{-1}(\{y\}))) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(\{x\})) \times \mathbb{P}(Y \in g^{-1}(\{y\})) = \mathbb{P}(f(X)=x) \times \mathbb{P}(g(Y)=y)$$

Ainsi, $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. ■

Exemple 24. Ainsi, si X et Y sont des VA réelles indépendantes, alors $X^2 \perp\!\!\!\perp Y \times \sin(Y^3)$.

5.4 Indépendance de n variables aléatoires

Définition de l'indépendance de n variables aléatoires

On dit que n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **indépendantes** si :

$$\forall (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(X_1(\Omega)) \times \ldots \times \mathscr{P}(X_n(\Omega)) \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in A_i)$$

Remarque 13. L'indépendance de n variables aléatoires va servir à modéliser la répétition d'une expérience identique où les résultats précédents n'ont pas de conséquences sur les expériences à venir. Par exemple, si X_k représente la valeur du dé au bout de k lancers, alors il paraît raisonnable de supposer que la famille $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est formée de VA indépendantes.

Proposition n° 11 : indépendance de n variables aléatoires.

$X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes si et seulement si :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega) \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i)$$

Remarque 14. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et $i \neq j$ alors X_i et X_j sont indépendantes (indépendance deux à deux). Plus généralement si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors toute sous-famille est indépendante.

Péril imminent la réciproque est fausse

Si X, Y et Z sont telles que X et Y sont indépendantes, X et Z aussi et Y et Z également, cela n'implique pas que X, Y et Z sont indépendantes. De même avec plus de trois variables aléatoires.

Exemple 25. Soit X tel que $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=-1) = \dfrac{1}{2}$, Y indépendante de X de même loi, on pose $Z = XY$, alors $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X \perp\!\!\!\perp Z$ et $Y \perp\!\!\!\perp Z$. Mais, X, Y et Z ne sont pas indépendantes.

En effet, $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z=1) &= \mathbb{P}((X=Y=1) \cup (X=Y=-1)) = \mathbb{P}(X=Y=1) + \mathbb{P}(X=Y=-1) \\ &= \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) + \mathbb{P}(X=-1)\mathbb{P}(Y=-1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a également $\mathbb{P}(Z=-1) = 1 - \mathbb{P}(Z=1) = \dfrac{1}{2}$. De plus, pour tout $(a,b) \in \{-1,1\}^2$,

$$\mathbb{P}((Z=a) \cap (X=b)) = \mathbb{P}(Y = a/b \cap X = b) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(Z=a) \times \mathbb{P}(X=b)$$

Ainsi, X et Z sont indépendants. De même, Y et Z sont indépendants. Cependant

$$\mathbb{P}((X=1) \cap (Y=1) \cap (Z=-1)) = 0 \neq \mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)\mathbb{P}(Z=1) = \frac{1}{8}$$

Exemple fondamental : somme de n variables aléatoires de Bernoulli

Soit $X_1, \dots, X_n$ n VA indépendantes, de même loi : $X_i \sim \mathscr{B}(p)$, alors $X = X_1 + \ldots + X_n \sim \mathscr{B}(n,p)$.

Démonstration de l'exemple fondamental : Tout d'abord, comme $X_i(\Omega) = \{0,1\}$, on a $X(\Omega) \subset [\![0\,; n]\!]$. Soit $k \in [\![0\,; n]\!]$. Notons $A_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0,1\}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = k\}$. Ainsi par union disjointe puis par indépendance puis en utilisant le fait que $\mathrm{Card}(A_k) = \dbinom{n}{k}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in A_k} (X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \ldots \cap (X_n = x_n) \right) \\ &= \sum_{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in A_k} \mathbb{P}((X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \cap \ldots \cap (X_n = x_n)) \\ &= \sum_{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in A_k} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \mathbb{P}(X_2 = x_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(X_n = x_n) \\ &= \sum_{(x_1,x_2,\dots,x_n) \in A_k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Théorème n° 4 : lemme des coalitions *(admis)*

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans E, soit $f\colon E^m \to F$ et $g\colon E^{n-m} \to F$, alors les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque 15. On peut faire plus de deux coalitions : les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_4)$, $g(X_5, \dots, X_8)$, $h(X_9, X_{10})$, ..., $m(X_{20}, \dots, X_{25})$ sont indépendantes.

Exemple 26. Si X_1, $X_2, \dots, X_7$ sont indépendantes, alors X_1X_2, $\exp(X_3) + X_4\sin(X_5)$, X_6, ${X_7}^8$ sont indépendantes.

6 Espérance et Variance

On cherche à calculer des indicateurs permettant de décrire X une variable aléatoire réelle. On se ne travaillera donc dans cette partie qu'avec des variables aléatoires réelles.

6.1 Espérance

Définition de l'espérance

Pour $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_p\}$, on appelle **espérance** de X : $$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{p} x_k \mathbb{P}(X = x_k) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$$

On dit que X est **centrée** si $\mathbb{E}(X) = 0$.

Remarque 16. $\mathbb{E}(X)$ est une moyenne pondérée (par les probabilités) des valeurs prises par X.

Exemples : espérances usuelles à connaître

1. Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1\,;n\rrbracket)$ alors $\mathbb{E}(X) = \dfrac{n+1}{2}$.
2. Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbb{E}(X) = p$.
3. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbb{E}(X) = np$.
4. Si A est un évènement de Ω, alors $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.

Montrons ces résultats

1. Si $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1\,;n\rrbracket)$, alors $X(\omega) = \llbracket 1\,;n\rrbracket$, ainsi
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$
2. Si $X \sim \mathscr{B}(p)$, alors $X(\Omega) = \{0, 1\}$, donc $\mathbb{E}(X) = 0\mathbb{P}(X = 0) + 1\mathbb{P}(X = 1) = p$.
3. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, alors $X(\Omega) = \llbracket 0\,;n\rrbracket$, donc
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$
Or [1], pour $k \in \llbracket 1\,;n\rrbracket$, $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$ On obtient donc
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} \underset{j=k-1}{=} n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} p^{j+1}(1-p)^{n-(j+1)} = np\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} p^{j}(1-p)^{(n-1)-j}$$
En reconnaissant la formule du binôme de Newton, on trouve $\mathbb{E}(X) = np(p + (1-p))^{n-1} = np$.
4. $X(\Omega) = \{0, 1\}$, $\mathbb{E}(X) = 0\mathbb{P}(X = 0) + 1\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega,\ \mathbb{1}(\omega) = 1\}) = \mathbb{P}(A)$. ■

Proposition n° 12 : écriture théorique de $\mathbb{E}(X)$

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ $$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} X(\omega_i)\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$

1. Formule du maire : dans une ville de n citoyens, on a un conseil municipal de k personnes dont un maire (avec $k \geqslant 1$ forcément) Combien y a-t-il de possibilités ? Pour choisir le conseil municipal de k personnes parmi les n citoyens, il y a $\dbinom{n}{k}$ possibilités. Une fois ce conseil municipal choisi, il y a k choix possibles pour le maire. Cela fait donc $k\dbinom{n}{k}$. Sinon, on choisit d'abord le maire parmi les n citoyens de la ville, il reste $k-1$ personnes à choisir pour le conseil municipal parmi les $n-1$ citoyens restant. Cela fait $\dbinom{n-1}{k-1}$ possibilités, en multipliant par n, cela fait $n\dbinom{n-1}{k-1}$, on a donc compter de deux façons différente la même chose, donc $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$.

Démonstration de la proposition n° 12 : Soit $x \in X(\Omega)$, alors $(X = x) = \bigcup_{\substack{\omega\in\Omega \\ \text{si } X(\omega)=x}} \{\omega\}$ (union d'ensembles deux à deux disjoints) Ainsi, $\mathbb{P}(X = x) = \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ \text{si } X(\omega)=x}} \mathbb{P}(\{\omega\})$. Dès lors,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in X(\Omega)} x \sum_{\substack{\omega\in\Omega \\ \text{si } X(\omega)=x}} \mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$$ ■

Proposition n° 13 : propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

- Linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
- Espérance d'une variable aléatoire constante : $\mathbb{E}(\lambda) = \lambda$
- Positivité de l'espérance : si $X \geqslant 0$ (pour tout $\omega \in \Omega, X(\omega) \geqslant 0$), alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$
- Croissance de l'espérance : si $X \leqslant Y$ $(\forall\omega \in \Omega, X(\omega) \leqslant Y(\omega))$ alors, $\mathbb{E}(X) \leqslant \mathbb{E}(Y)$
- Inégalité triangulaire : $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$

Exemple 27. Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, alors $\mathbb{E}(X) = np$

Théorème n° 5 formule de transfert

Soient X une VA à valeurs dans E et $f : E \to \mathbb{R}$ et $Y = f(X)$ alors : $\mathbb{E}(Y) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$

Démonstration du théorème n° 5 : En utilisant l'expression de la loi de Y en fonction de X, on obtient :

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y\in Y(\Omega)} y \sum_{\substack{x\in X(\Omega) \\ \text{si } f(x)=y}} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} \sum_{\substack{x\in X(\Omega) \\ \text{si } f(x)=y}} f(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\mathbb{P}(X = x)$$

■

Remarque 17. Ce théorème permet de calculer $\mathbb{E}(Y)$ sans connaître la loi de Y mais à partir de la loi de X. On remarque que ce théorème s'applique si X est un couple ou un n-uplet de variables aléatoires.

Exemple 28.

1. Si $X \sim \mathscr{U}([\![1\,;n]\!])$ calculer $\mathbb{E}(X^2)$.
2. Si $X \sim \mathscr{U}([\![1\,;n]\!])$ calculer $\mathbb{E}(3^X)$.
3. Si $X \sim \mathscr{B}(n, p)$, calculer $\mathbb{E}(X^2)$.

Proposition n° 14 : inégalité de Markov

Soient $a > 0$ et X une variable aléatoire **positive**. Alors $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$

Démonstration de la proposition n° 14 : Comme, X est positive $x\mathbb{P}(X = x) \geqslant 0$ pour $x \in X(\omega)$ et $x < a$, ainsi :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \geqslant \sum_{\substack{x\in X(\Omega) \\ x\geqslant a}} x\mathbb{P}(X = x) \geqslant \sum_{\substack{x\in X(\omega) \\ x\geqslant a}} a\mathbb{P}(X = x) = a\mathbb{P}(X \geqslant a)$$ ■

Exemple 29. Si dans une classe, la moyenne au DS est 6, alors que peut-on dire de la probabilité d'avoir une note supérieure ou égale à 18 ?

Proposition n° 15 : espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

Soient X et Y deux VA indépendantes alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Si $X_1, X_2 \ldots, X_n$ sont indépendantes alors $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

Démonstration de la proposition n° 15 : En utilisant l'écriture théorique de l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{\omega\in\Omega}(XY)(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}\sum_{\omega\in(X=x)\cap(Y=y)} X(\omega)Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xy \sum_{\omega\in(X=x)\cap(Y=y)}\mathbb{P}(\{\omega\})\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}((X=x)\cap(Y=y))\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X=x)\times\mathbb{P}(Y=y)\\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X=x)\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y=y) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)
\end{aligned}$$

■

Péril imminent : la réciproque est fausse

Si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, ça ne prouve pas forcément que X et Y sont indépendantes.

Exemple 30. $X \sim \mathscr{U}([\![-1\,;1]\!])$ et $Y = 1 - X^2$

En effet, $XY = X(1-X^2) = 0$. Or, $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{E}(XY) = 0$. De plus,

$$\mathbb{P}((X=0)\cap(Y=0)) = \mathbb{P}((X=0)\cap(X^2=1)) = 0$$

Tandis que $\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=0) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}$. Ainsi, X et Y ne sont indépendantes mais $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

6.2 Variance

Définition de la variance et de l'écart-type

Soit X une variable aléatoire, on appelle **variance** de X le réel positif $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$

On appelle **écart-type** de X le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$

Remarque 18. La variance mesure la moyenne les carrés des écarts de X par rapport à $\mathbb{E}(X)$.
Par la formule de transfert, $\mathbb{V}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)}(x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x)$.

Proposition n° 16 : propriétés de la variance

Soit X une variable aléatoire alors :

1. $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$
2. $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad \mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$ (la variance est quadratique)
3. $\mathbb{V}(X) = 0 \iff \mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$ (X est presque sûrement constante)
4. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$ (formule de König-Huygens)
5. Si $\mathbb{V}(X) > 0$, alors $Y = \dfrac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est une variable centrée réduite ($\mathbb{E}(Y) = 0$ et $\mathbb{V}(Y) = 1$)

Démonstration de la proposition n° 16 :

1. Comme $(X - \mathbb{E}(X))^2 \geqslant 0$ par positivité de l'espérance, $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
2. $\mathbb{V}(aX+b) = \mathbb{E}((aX+b-\mathbb{E}(aX+b))^2) = \mathbb{E}((aX+b-a\mathbb{E}(X)-b)^2) = \mathbb{E}(a^2(X-\mathbb{E}(X))^2) = a^2\mathbb{V}(X)$
3. Pour cette démonstration on va séparer les valeurs que peut prendre X entre celles qui ont une probabilité non nulle et celles qui ont une probabilité nulle : notons $B = \{x \in X(\Omega),\ \mathbb{P}(X=x)=0\}$ et $C = X(\Omega)\backslash B$, alors $X(\Omega) = B \cup C$ et $B \cap C = \varnothing$, ainsi
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x\in B}(x-\mathbb{E}(X))^2\underbrace{\mathbb{P}(X=x)}_{=0} + \sum_{x\in C}(x-\mathbb{E}(X))^2\underbrace{\mathbb{P}(X=x)}_{\neq 0} = \sum_{x\in C}(x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x)$$
Ainsi, supposons que $\mathbb{V}(X) = \sum_{x\in C}(x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x) = 0$ alors $x \in C$, $(x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x) = 0$ (somme nulle de termes positifs) alors pour tout $x \in C$, $x = \mathbb{E}(X)$. Ainsi, $C = \{\mathbb{E}(X)\}$ Or,
$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x\in B}\mathbb{P}(X=x) = 0$$
Donc $\mathbb{P}(X \in C) = 1 - \mathbb{P}(X\in B) = 1$, ainsi $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$. Ainsi, X est quasi-certaine égale à $\mathbb{E}(X)$. Réciproquement, supposons que X est quasi-certaine égale à $\mathbb{E}(X)$. Alors $X(\Omega) = \{\mathbb{E}(X), x_2, \dots, x_p\}$, avec $\mathbb{P}(X=\mathbb{E}(X)) = 1$ et donc $i \in [\![2\,;p]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) = 0$. En réutilisant la formule de transfert,
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)}(x-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=x) = (\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(X))^2\mathbb{P}(X=\mathbb{E}(X)) + 0 = 0$$
4. En utilisant une identité remarquable et la linéarité de l'espérance :
$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right)\\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2\end{aligned}$$ ■

Exemples de variances des lois usuelles à connaître :

1. Si $X \sim \mathscr{U}([\![1\,;n]\!])$ alors $\mathbb{V}(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$
2. Si $X \sim \mathscr{B}(p)$ alors $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$
3. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ alors $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$

En utilisant la formule de transfert pour calculer $\mathbb{E}(X^2)$, on obtient :

1. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n+1}{12}(4n+2-(3n+3)) = \frac{n^2-1}{12}$.
2. Comme $X^2 = X$, on a $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = p - p^2 = p(1-p)$.
3. En utilisant [2] $k(k-1)\binom{n}{p} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ valable pour $k \in [\![2\,;n]\!]$, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{k=0}^{n}\left(k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right) + np - (np)^2\\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(k(k-1)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\right) + np - (np)^2\\ &= \sum_{k=2}^{n}\left(n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k(1-p)^{n-k}\right) + np - (np)^2\\ &= n(n-1)p^2\sum_{j=0}^{n-2}\left(\binom{n-2}{j}p^j(1-p)^{n-2-j}\right) + np - (np)^2\\ &= n(n-1)p^2(p+(1-p))^{n-2} + np - n^2p^2 = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p)\end{aligned}$$

Définition de la covariance de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux VA réelles, on définit la **covariance** de X et Y par $\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))$
On dit que X et Y sont **non corrélées** si $\operatorname{cov}(X,Y) = 0$.

2. Formule du maire et de son adjoint : dans une ville de n citoyens, on veut un conseil municipal de k personnes dont un maire et un adjoint (avec $k \geqslant 2$ donc). Soit on choisit d'abord le conseil de k personnes, cela fait $\binom{n}{k}$ possibilités, parmi ce groupe, on a k choix pour le maire, à ce maire fixé, il reste $k-1$ pour son adjoint, soit $k(k-1)\binom{n}{k}$ possibilités. Soit on choisit le maire parmi les n personnes, puis son adjoint parmi les $n-1$ personnes restantes, cela fait $n(n-1)$ possibilités, il reste à choisir les $k-2$ personnes pour former le conseil municipal parmi les $n-2$ citoyens restants, soit $n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ possibilités.

Proposition n° 17 : formule de la covariance

Si X et Y sont deux VA réelles, alors $\operatorname{cov}(X,Y)=\mathbb{E}(XY)-\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Remarque 19. Si X et Y sont indépendantes, alors X et Y sont non corrélées.

Remarque 20. $\mathbb{V}(X)=\operatorname{cov}(X,X)$

Attention la réciproque est fausse

Il est possible d'être non corrélées sans être indépendantes.

Exemple 31. Si $X\sim\mathscr{U}(\{-1,0,1\})$, alors $\operatorname{cov}(X,X^2)=0$ alors que X et X^2 ne sont pas indépendantes.

Proposition n° 18 : variance de la somme de variables aléatoires

1. Soient X et Y deux VA alors $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$
2. Si X et Y sont non corrélées (ou indépendantes), alors $\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)$
3. Soient $X_1,\dots,X_n$, n variables aléatoires, $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n\mathbb{V}(X_i)+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\operatorname{cov}(X_i,X_j)$
4. Si $X_1,\dots,X_n$ sont deux à deux non corrélées (ou deux à deux indépendantes), alors $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\sum_{i=1}^n\mathbb{V}(X_i)$

Démonstration de la proposition n° 18 :

- En utilisant la formule de Koening-Huygens, les identités remarquables et la linéarité de l'espérance et ce qui précède, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X+Y)&=\mathbb{E}((X+Y)^2)-\mathbb{E}(X+Y)^2\\&=\mathbb{E}(X^2+2XY+Y^2)-(\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y))^2\\&=\mathbb{E}(X^2)+2\mathbb{E}(XY)+\mathbb{E}(Y^2)-\mathbb{E}(X)^2-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)-\mathbb{E}(Y)^2=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)\end{aligned}$$

-
- Posons $X=\sum_{i=1}^n X_i$, par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(X_i)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X)&=\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)=\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n X_i-\sum_{i=1}^n\mathbb{E}(X_i)\right)^2\right)=\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=1}^n(X_i-\mathbb{E}(X_i))\right)^2\right)\\&=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(X_i-\mathbb{E}(X_i))(X_j-\mathbb{E}(X_j))\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathbb{E}\left(X_iX_j-\mathbb{E}(X_i)X_j-X_i\mathbb{E}(X_j)+\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\right)\\&=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathbb{E}(X_iX_j)-\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)-\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)+\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathbb{E}(X_iX_j)-\mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j)\end{aligned}$$

-

■

Proposition n° 19 : variance d'une binomiale

Si $X\sim\mathscr{B}(n,p)$, alors $\mathbb{V}(X)=np(1-p)$

Théorème n° 6 : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient X une variable aléatoire et $\varepsilon>0$, alors $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$

Démonstration du théorème n° 6 : Par croissance des applications $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$, $(|X-\mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = (|X-\mathbb{E}(X)|^2 \geqslant \varepsilon^2)$. Ainsi, par application de l'inégalité de Markov, à la variable aléatoire **positive** $|X - \mathbb{E}(X)|^2$:

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2) = \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2} \qquad \blacksquare$$

Exemple 32. Supposons qu'on ait dé dont la probabilité d'obtention un six est notée p. Pour approximer p, on lance ce dé n fois et on note F la fréquence du six. Pour quelle valeur de n la probabilité pour que F soit une approximation de p à 0.01 près est-elle supérieure à 0.9 ?

Remarque 21. Sur cet exemple, on a montré que la probabilité d'un évènement est la limite de la fréquence de cet évènement lorsque l'on répète un évènement un «grand» nombre de fois. Cela est conforme à l'intuition, dire qu'un dé est équilibré indique que si on le lance un très grand nombre de fois la fréquence d'une face doit tendre vers 1/6. Cela permet de relier la probabilité à cette notion intuitive ce que l'on avait soigneusement évité jusqu'à présent.

7 Tableau récapitulatif des lois usuelles

Les caractéristiques de ce tableau doivent être absolument connu par cœur pour les quatre premières variables aléatoires. Les deux dernières seront vu en PC/PSI. Ainsi l'année prochaine, vous pourrez réviser toutes les lois usuelles sur ce tableau.

Nom de la loi	Paramètre	Univers image	Loi de probabilité	Espérance	Variance	Interprétation
Quasi-certaine	$a \in \mathbb{R}$		$\mathbb{P}(X = a) = 1$	a	0	
Bernoulli	$p \in [\,0\,;1\,]$	$\{0, 1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	p	$p(1-p)$	succès vs échec
Binomiale	$(p, n) \in [\,0\,;1\,] \times \mathbb{N}^*$	$[\![\,0\,;n\,]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$	np	$np(1-p)$	nombre de succès dans n Va de Bernoulli de paramètre p indépendantes
Uniforme	n	$[\![\,1\,;n\,]\!]$	$\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{1}{n}$ pour $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	tirage équitable
Géométrie	$p \in]\,0\,;1\,[$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	Donne le premier succès dans une suite de Va indépendantes de Bernoulli de paramètre p
Poisson	$\lambda > 0$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-k}$ pour $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	Désintégration radioactive, arrivé dans une file d'attente, évènements rares etc.