Chapitre 20

Intégration

Prérequis :
- Les outils de calculs d'intégrales et de primitives : IPP, changement de variable, primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.
- Connaître les primitives de références.

L'objectif de ce chapitre est de donner une définition rigoureuse de l'intégrale et de prouver les outils de calculs d'intégrales.

Table des matières

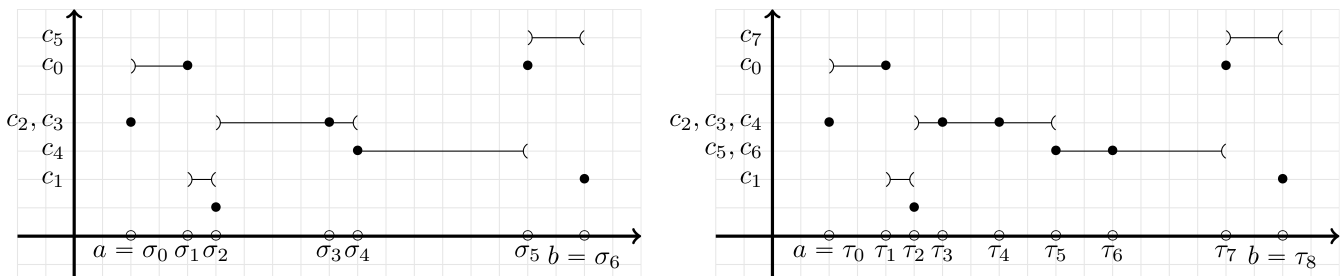
Dans tout ce chapitre, sauf mention contraire, $I = [\,a\,;b\,]$ désigne un segment de $\mathbb{R}$ (avec $a < b$).

1 Intégrale des fonctions en escalier

Définition d'une fonction en escalier

On dit que $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ **est une fonction en escalier** s'il existe $a = \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_{n-1} < \sigma_n = b$ tels que f soit constante sur chaque intervalle $]\,\sigma_i\,;\sigma_{i+1}\,[$: $\forall i \in [\![\,0\,;n-1\,]\!] \quad \exists c_i \in \mathbb{R} \quad \forall x \in\,]\,\sigma_i\,;\sigma_{i+1}\,[\quad f(x) = c_i$

On dit que $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est une **subdivision adaptée** à f. On note $\rho = \max(\sigma_{i+1} - \sigma_i)$ le pas de la subdivision.



(a) σ une subdivision de I adaptée à f.

(b) τ une autre subdivision de I aussi adaptée à f.

FIGURE 1 – Une fonction en escalier, et deux subdivisions adaptées. Les parenthèses signifient qu'on ne prend pas le bord de l'intervalle. Les valeurs de la fonction aux points de la subdivision sont représentées en $\bullet$.
Il n'y a pas unicité de la subdivision adaptée.

Proposition n° 1 : structure des fonctions en escalier

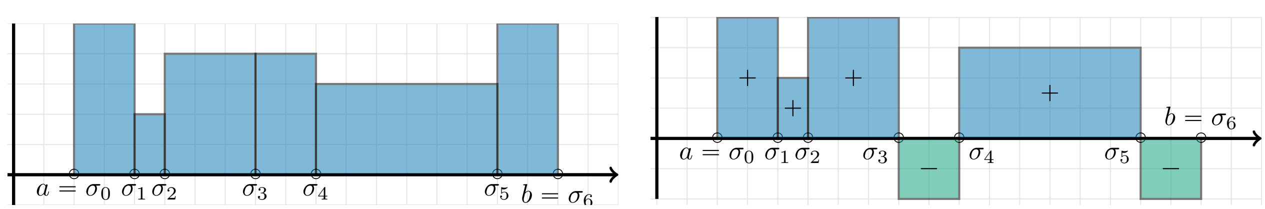
L'ensemble des fonctions en escalier sur I, noté $\mathscr{E}(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

Démonstration de la proposition n° 1 :

- La fonction nulle est une fonction en escalier.
- Soient $(f, g) \in \mathscr{E}(I, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ une subdivision adaptée à f et $\tau = (\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_n)$ une subdivision adaptée à g. Posons $E = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_n\} \bigcup \{\tau_1, \ldots, \tau_p\}$. On note $\rho_0 = a < \rho_1 < \ldots < \rho_s = b$ les éléments de E rangés par ordre croissant. La subdivision ρ est adaptée à f et à g. Ainsi $\lambda f + g$ est constante sur chacun des $]\,\rho_i\,;\rho_{i+1}\,[$. Ainsi $\lambda f + g \in \mathscr{E}(I, \mathbb{R})$. ∎

Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier

Soient $f \in \mathscr{E}(I, \mathbb{R})$ et $\sigma = (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ une subdivision adaptée à f. Notons c_i la valeur de f sur $]\,\sigma_i\,;\sigma_{i+1}\,[$. On définit l'intégrale de f sur I par : $\displaystyle\int_I f = \int_a^b f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \times (\sigma_{k+1} - \sigma_k)$.



(a) Si la fonction est positive, l'intégrale est définie comme la somme des aires des rectangles.

(b) Si la fonction prend des valeurs négatives, l'intégrale est définie comme la somme des aires algébriques des rectangles.

FIGURE 2 – On définit l'intégrale comme la somme des aires des rectangles, attention si la valeur de la constante est négative, l'aire est comptée négativement.

Remarque 1. Si $f \in \mathscr{E}(I, \mathbb{R})$, alors on peut montrer que $\displaystyle\int_I f$ ne dépend pas de la subdivision adaptée à f choisie. On remarque que l'intégrale de f ne dépend pas de la valeur de f aux points de la subdivision.

Proposition n° 2 : propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier
Pour tous $(f, g) \in \mathscr{E}(I, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. Linéarité : $\displaystyle\int_a^b \lambda f + g = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$
2. Positivité : si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
3. Croissance : si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$
4. Chasles : pour $c \in I$ $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
5. Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$
6. Si $f \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ **sauf en un nombre fini de points**

Démonstration de la proposition n° 2 : Comme on peut écrire les intégrales comme des sommes, ces propriétés découlent directement de la somme. ∎

2 Définition de l'intégrale d'une fonction continue et propriétés

Théorème n° 1 approximation par des fonctions par défaut ou par excès *(admis)*
Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. On note $m(f) = \left\{\displaystyle\int_a^b g,\ g \in \mathscr{E}(I, \mathbb{R}),\ g \leqslant f\right\}$ et $M(f) = \left\{\displaystyle\int_a^b g,\ g \in \mathscr{E}(I, \mathbb{R}),\ g \geqslant f\right\}$.
L'ensemble $m(f)$ (resp. $M(f)$) a une borne supérieure (resp. inférieure), de plus : $\sup m(f) = \inf M(f)$.

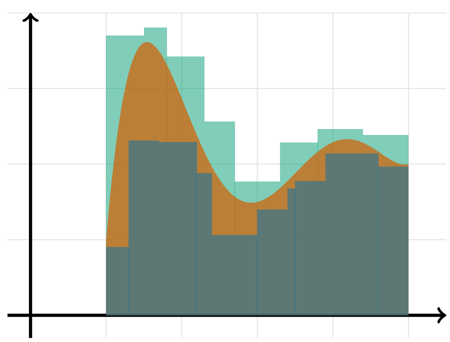


FIGURE 3 – La fonction f, ainsi que deux fonctions en escalier une plus grande que f l'autre plus petite.

Démonstration du théorème n° 1 :

- Fixons un $\varepsilon > 0$. Et montrons d'abord qu'il existe $g \in \mathscr{E}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ tel que $g - \varepsilon \leqslant f \leqslant g + \varepsilon$:
  - Posons
  $$T = \{t \in [\,a\,;b\,] \quad \exists g \in \mathscr{E}([\,a\,;t\,], \mathbb{R}) \qquad \forall x \in [\,a\,;t\,] \quad g(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) + \varepsilon\}$$
  Si jamais on arrive à montrer que $b \in T$, on aura gagné la partie.
  - Tout d'abord $a \in T$, en effet, $g\colon a \mapsto f(a) \in \mathscr{E}([\,a\,;a\,], \mathbb{R})$.
  - L'ensemble T étant non vide et bornée par b, T admet une borne supérieure. Posons $t_0 = \sup T \in [\,a\,;b\,]$.
  - Comme f est continue en t_0 :
  $$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in [\,a\,;b\,] \qquad t_0 - \delta \leqslant x \leqslant t_0 + \delta \quad \Longrightarrow \quad f(t_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(t_0) + \varepsilon \tag{1}$$
  Comme $t_0 - \delta$ n'est pas un majorant de T, il existe $t_1 \in T$ tel que $t_0 - \delta < t_1 \leqslant t_0$. Ainsi, par définition de T, il existe $g \in \mathscr{E}([\,a\,;t_1\,], \mathbb{R})$ tel que
  $$\forall x \in [\,a\,;t_1\,] \quad g(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) + \varepsilon \tag{2}$$

Posons $m = \min(t_0 + \delta, b)$. Prolongeons g sur l'intervalle $]\, t_1 \,; m\,]$:

$$\tilde{g} : \begin{cases} [\, a \,; m\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \quad \longmapsto \begin{cases} g(x) & \text{si} \quad x \in [\, a \,; t_1\,] \\ f(t_0) & \text{si} \quad x \in \,]\, t_1 \,; m\,] \end{cases} \end{cases}$$

Alors $\tilde{g} \in \mathscr{E}([\, a \,; m\,], \mathbb{R})$ et d'après (1) et (2) on a

$$\forall x \in [\, a \,; m\,] \qquad \tilde{g}(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \tilde{g}(x) + \varepsilon$$

Ainsi $m \in T$. Si $m = t_0 + \delta$, cela contredit la définition de $t_0 = \sup T$, d'où $m = b \in T$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, d'après ce qui précède, il existe $g \in \mathscr{E}([\, a \,; b\,], \mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in [\, a \,; b\,]$ tel que $g(x) - \dfrac{1}{n} \leqslant f(x) \leqslant g(x) + \dfrac{1}{n}$. Ainsi $\displaystyle\int_a^b \left(g(x) - \frac{1}{n} \right) \mathrm{d}x \in m(f)$ et $\displaystyle\int_a^b \left(g(x) + \frac{1}{n} \right) \mathrm{d}x \in M(f)$. Les ensembles $m(f)$ et $M(f)$ sont non vides.
- Si $(h, \tilde{h}) \in \mathscr{E}([\, a \,; b\,], \mathbb{R})^2$ tel que $h \leqslant f$ et $f \leqslant \tilde{h}$, alors $h \leqslant \tilde{h}$, par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_a^b h \leqslant \int_a^b \tilde{h}$ et ce pour tout $h \leqslant f$, ceci montre que $m(f)$ est majorée par $\displaystyle\int_a^b \tilde{h}$. Donc $m(f)$ admet une borne supérieure et $\sup m(f) \leqslant \displaystyle\int_a^b \tilde{h}$ et ce pour tout $\tilde{h} \geqslant f$, ceci montre que $M(f)$ est minorée par $\sup m(f)$, ainsi $M(f)$ admet une borne inférieure et $\sup m(f) \leqslant \inf M(f)$.
- Comme $\displaystyle\int_a^b \left(g(x) - \frac{1}{n} \right) \mathrm{d}x \in m(f)$ et $\displaystyle\int_a^b \left(g(x) + \frac{1}{n} \right) \mathrm{d}x \in M(f)$. On obtient donc :

$$\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \leqslant \sup\ m(f) \qquad \text{et} \qquad \inf\ M(f) \leqslant \int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x + \frac{b-a}{n}$$

On a donc :

$$0 \leqslant \inf\ M(f) - \sup\ m(f) \leqslant \left(\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x + \frac{b-a}{n} \right) - \left(\int_a^b g(x)\, \mathrm{d}x - \frac{b-a}{n} \right) = \frac{2(b-a)}{n}$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on a $\inf\ M(f) = \sup\ m(f)$. ∎

Définition de l'intégrale d'une fonction continue

On définit l'intégrale de $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$ par $\displaystyle\int_I f = \int_a^b f = \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t = \sup\ m(f) = \inf M(f).$

Remarque 2. Si f est constante, alors elle est à la fois en escalier et à la fois continue, ainsi $\displaystyle\int_a^b f$ a été définie deux fois. Heureusement, ces deux définitions coïncident.

Démonstration de la remarque : notons $E = \displaystyle\int_a^b f$ l'intégrale de f vue comme une fonction en escalier et $C = \displaystyle\int_a^b f$ l'intégrale de f vue comme une fonction continue. Alors $f \leqslant f$, ainsi, $E \in m(f)$, donc $E \leqslant \sup m(f) = C$. De même $f \geqslant f$, donc $E \in M(f)$, ainsi $E \geqslant \inf M(f) = C$. D'où $E = C$.

Proposition n° 3 : propriétés de l'intégrale des fonctions continues sur un segment

Pour tout $(f, g) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes :

1. Linéarité : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$
2. Positivité : si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \geqslant 0$
3. Croissance : si $f \leqslant g$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$
4. Chasles : pour $c \in I$ on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
5. Inégalité triangulaire : $\displaystyle\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x$

Démonstration de la proposition n° 3 : L'idée est d'utiliser les propriétés de l'intégrale déjà démontrée pour les fonctions en escalier avec la définition de l'intégrale comme borne supérieure/borne inférieure :

1. - Soit $\tilde{f}$ une fonction en escalier avec $\tilde{f} \leqslant f$ et $\tilde{g}$ une fonction en escalier avec $\tilde{g} \leqslant g$, alors $\tilde{f} + \tilde{g} \leqslant f + g$. Et comme $\tilde{f} + \tilde{g}$ est une fonction en escalier, on a $\int_a^b \tilde{f} + \tilde{g} \in m(f+g)$. Dès lors
$$\int_a^b f + g = \sup\ m(f+g) \geqslant \int_a^b \tilde{f} + \tilde{g} = \int_a^b \tilde{f} + \int_a^b \tilde{g}$$
Et ce quelque soit $\tilde{f}$ en escalier tel que $\tilde{f} \leqslant f$. Ainsi, $\int_a^b f + g - \int_a^b \tilde{g}$ est un majorant de $m(f)$, donc
$$\int_a^b f + g - \int_a^b \tilde{g} \geqslant \sup\ m(f) = \int_a^b f$$
Dès lors $\int_a^b f + g - \int_a^b f \geqslant \int_a^b \tilde{g}$, et ce pour tout $\tilde{g}$ fonction en escalier tel que $\tilde{g} \leqslant g$. En passant à la borne supérieure, on obtient $\int_a^b f + g - \int_a^b \tilde{f} \geqslant m(g) = \int_a^b g$. On a donc prouvé que $\int_a^b f + g \geqslant \int_a^b f + \int_a^b g$.
   - En considérant cette fois-ci $\tilde{f} \geqslant f$ et $\tilde{g} \geqslant g$ et en travaillant avec $M(f)$ et $M(g)$, on obtient l'autre inégalité. Ce qui prouve $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$.
   - Si $\lambda = 0$, alors $\int_a^b \lambda f = 0 = \lambda \int_a^b f$.
   - Si $\lambda > 0$, et $\tilde{f}$ en escalier telle que $\tilde{f} \leqslant f$, alors $\lambda \tilde{f} \leqslant \lambda f$, ainsi $\lambda \int_a^b \tilde{f} \leqslant \sup m(\lambda f) = \int_a^b \lambda f$. Dès lors $\int_a^b \tilde{f} \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_a^b \lambda f$, en passant à la borne supérieure $\int_a^b f = \sup m(f) \leqslant \frac{1}{\lambda} \int_a^b \lambda f$. Donc $\lambda \int_a^b f \leqslant \int_a^b \lambda f$. En appliquant ce résultat à λ^{-1} et à la fonction λf, on obtient $\lambda^{-1} \int_a^b (\lambda f) \geqslant \int_a^b \lambda^{-1}(\lambda f)$. Par conséquent $\int_a^b \lambda f \geqslant \lambda \int_a^b f$.
   - Si $\lambda < 0$, laissé au lecteur, (attention multiplier par un nombre négatif a le mauvais goût de changer les inégalits)
2. Si $f \geqslant 0$, alors 0 est une fonction en escalier, ainsi $\int_a^b 0 \in m(f)$. Donc $\int_a^b f = \sup m(f) \geqslant \int_a^b 0 = 0$.
3. Si $f \leqslant g$, alors $g - f \geqslant 0$, en utilisant la positivité, $\int_a^b g - f \geqslant 0$. Par linéarité, $\int_a^b g - \int_a^b f \geqslant 0$.
4. Soit $\tilde{f}_1$ en escalier sur $[\,a\,;c\,]$ et $\tilde{f}_2$ en escalier sur $[\,c\,;b\,]$. Avec $\tilde{f}_1 \leqslant f_{|[\,a\,;\,c\,]}$ et $\tilde{f}_2 \leqslant f_{|[\,c\,;\,b\,]}$. Posons $\tilde{f}(x) = f_1(x)$ si $x \in [\,a\,;c\,]$ et $\tilde{f}(x) = \tilde{f}_2(x)$ si $x \in \,]\,c\,;b\,]$. Alors, $\tilde{f}$ est en escalier et $\tilde{f} \leqslant f$. Ainsi, $\int_a^b f = \sup m(f) \geqslant \int_a^b \tilde{f} = \int_a^c \tilde{f} + \int_c^b \tilde{f} = \int_a^c \tilde{f}_1 + \int_c^b \tilde{f}_2$. Donc, $\int_a^b f - \int_c^b \tilde{f}_2 \geqslant \int_a^c \tilde{f}_1$, et ce quelque soit $f_1 \in \mathscr{E}([\,a\,;c\,], \mathbb{R})$ tel que $f_1 \leqslant f$. En passant à la borne supérieure, $\int_a^b f - \int_c^b \tilde{f}_2 \geqslant \sup(m(f_{|[\,a\,;\,c\,]})) = \int_a^c f$. Donc, $\int_a^b f - \int_a^c f \geqslant \int_c^b \tilde{f}_2$, donc en passant à la borne supérieure, $\int_a^b f - \int_a^c f \geqslant \int_c^b f$. Donc $\int_a^b f \geqslant \int_a^c f + \int_c^b f$. La seconde inégalité est laissée au lecteur.
5. On a $-|f| \leqslant f \leqslant f$, en utilisant la croissance de l'intégrale, il vient $\int_a^b -|f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$. Ainsi, $-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$, donc $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$. ■

Proposition n° 4 : nullité de l'intégrale et fonctions positives

1. Si f est continue sur I, positive sur I et qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$ alors $$\int_a^b f > 0$$
2. Si f est continue sur I, positive sur I et si $\int_a^b f = 0$ alors f est nulle sur I.

Démonstration de la proposition n° 4 :

1. S'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$, en posant $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, par continuité de f en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - x_0| \leqslant \delta$, $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. Posons $J = [\,x_0 - \delta\,;x_0 + \delta\,] \cap I = [\,\alpha\,;\beta\,]$ avec $\alpha < \beta$. Posons $g = \varepsilon \mathbb{1}_{[\,x_0-\delta\,;\,x_0+\delta\,]\cap I}/2$, alors g est une fonction en escalier et $g \leqslant f$, une subdivision adaptée à g étant $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ (si $\alpha = a$, on retire α idem pour β) Dès lors
$$\int_a^b f = \sup m(f) \geqslant \int_a^b g = 0(\alpha - a) + \varepsilon(\beta - \alpha)/2 + 0(b - \beta) > 0$$
2. Contraposée du point précédent. ■

Remarque 3. On déduit une propriété équivalente pour f négative.

Attention aux fonctions en escalier

La proposition 4 est vraie avec des fonctions continues, elle est fausse avec des fonctions en escalier.

Remarque 4. Si $a > b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. Mais la croissance, la positivité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire ne sont plus valables. En cas de doute, et quitte à rajoutez un moins, changez les bornes de l'intégrale de façon à obtenir des bornes dans le bon sens. Si $a = b$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (par convention).

Remarque 5. On l'a vu, l'intégrale d'une fonction en escalier est la somme des aires de ses rectangles. Cependant, cette aire est comptée négativement lorsque la fonction prend des valeurs négatives. C'est la même chose pour les fonctions continues.

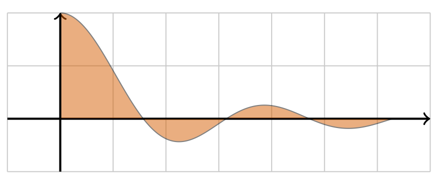


FIGURE 4 – Les aires des parties sous la courbe comptent négativement dans le calcul de l'intégrale.

Remarque 6. Si $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,])$, $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la valeur moyenne de f sur $[\,a\,;b\,]$.

3 Calculs d'intégrales

3.1 Intégrales et primitives

Définition d'une primitive

Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

Théorème n° 2 fondamental de l'analyse

Soient I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. Posons, pour $x \in I$, $G(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. G est une primitive de f qui s'annule en x_0.
2. Les primitives de f sont exactement les fonctions de la forme $G + c$ où $c \in \mathbb{R}$.
3. La fonction G est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

Démonstration du théorème n° 2 :

1. Montrons que G est une primitive de f, *i.e* que pour tout $x \in I$: $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$. Fixons $\varepsilon > 0$ et $x \in I$, calculons donc $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x) &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - f(x) && \text{Chasles}\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - hf(x)\right)\\
&= \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^{x+h} f(x)\,\mathrm{d}t\right) && \text{intégration d'une fonction constante}\\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \left(f(t)-f(x)\right)\,\mathrm{d}t && \text{linéarité de } \int\\
\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)\right| &= \frac{1}{|h|}\left|\int_x^{x+h} f(t)-f(x)\,\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t && \text{si } h>0\\
\left|\frac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)\right| &= \frac{1}{|h|}\left|-\int_{x+h}^{x} f(t)-f(x)\,\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\left|\int_{x+h}^{x} f(t)-f(x)\,\mathrm{d}t\right| && \text{si } h<0\\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{x+h}^{x} |f(t)-f(x)|\,\mathrm{d}t && \text{si } h<0
\end{aligned}$$

Écrivons la continuité de f en x : $\exists \delta > 0 \quad \forall t \in I \qquad |t-x| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-f(t)| \leqslant \varepsilon$.
Ainsi pour $0 < h \leqslant \delta$, on a $\left|\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_x^{x+h} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \varepsilon$
Ainsi pour $-\delta \leqslant h < 0$, on a $\left|\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{|h|}\displaystyle\int_{x+h}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{|h|}(-h)\varepsilon = \varepsilon$ D'où

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad |h| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{G(x+h)+G(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon$$

D'où $\dfrac{G(x+h)+G(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$. Ainsi, G est donc dérivable et $G'(x) = f(x)$, il est clair que $G(x_0) = 0$. Ainsi G est une primitive de f sur I qui s'annule en x_0.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$, alors $G + c$ est encore dérivable et $(G+c)' = G' = f$, ainsi $G + c$ est une primitive de f. Soit F une primitive de f, alors $F - G$ est dérivable et $(F-G)' = F' - G' = f - f = 0$. Ainsi, $F - G$ a une dérivée nulle sur un intervalle donc est constante. Ainsi, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F - G = c$. Dès lors $F = G + c$

3. Soit F une primitive de f qui s'annule en x_0. Par ce qui précède, il existe $c \in \mathbb{R}$, $F = G + c$. D'où $F(x_0) = G(x_0) + c$, donc $c = 0$. Ainsi $F = G$. ∎

Corollaire 1 : calcul d'intégrale

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$ et F une primitive de f, alors : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Démonstration du corollaire : posons $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x$. Il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G = F + c$, alors, $\begin{cases} G(a) &= F(a)+c \\ G(b) &= F(b)+c \end{cases}$.
Par différence, $F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple 1. Montrer que $x \mapsto \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est dérivable et calculer sa dérivée. De même avec $x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exemple 2. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est T-périodique et $a \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.

Remarque 7. On pose, pour $x > 0$, $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, ainsi ln est une fonction dérivable et pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = 1/x$. Avec cette dérivée, on prouve ensuite que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, et que ln réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$. On pose $\exp = \ln^{-1}$. Avec le théorème de la dérivée de la bijection réciproque, $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \left(\dfrac{1}{\exp(x)}\right)^{-1} = \exp(x)$. On a donc démontré l'existence (admise auparavant) du logarithme et de l'exponentielle.

3.2 Révision des primitives de référence

3.3 Révision de la méthode des intégrales des fractions rationnelles

3.4 Intégration par parties/changement de variable

Théorème n° 3 d'intégration par parties

Soit $(u, v) \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{R})^2$, alors :
$$\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Théorème n° 4 : de changement de variable

Soient $\varphi \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^0(\varphi([\,a\,;b\,]), \mathbb{R})$, alors
$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemple 3. Si $f \in \mathscr{C}^0([\,-a\,;a\,], \mathbb{R})$ est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$, si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f = 0$.

4 Somme de Riemann

Théorème n° 5 des sommes de Riemann *(admis sauf version f C-lipschitzienne)*

Si $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$, alors
$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f$$

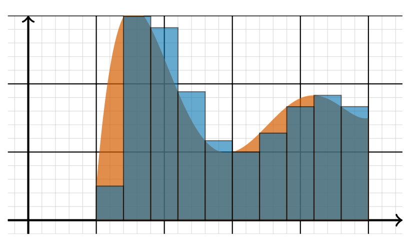


FIGURE 5 – La fonction f et son approximation par une somme de Riemann

Démonstration du théorème n° 5 : Supposons que f est C-lipschitizienne : pour tout $(x, x') \in I^2$, $|f(x) - f(x')| \leqslant C|x - x'|$.

Commençons par calculer la différence entre la somme de Riemann et l'intégrale. Posons $\sigma_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$:

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\sigma_i) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{b-a}{n}f(\sigma_i) - \int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x\right] && \text{Chasles}\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} f(\sigma_i) - f(x)\,\mathrm{d}x && \text{linéarité de } \int\\
\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} f(\sigma_i) - f(x)\,\mathrm{d}x\right| && \text{inég. triangulaire}\\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} |f(\sigma_i) - f(x)|\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} C|\sigma_i - x|\,\mathrm{d}x && \text{lipschitzienne}\\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\int_{\sigma_i}^{\sigma_{i+1}} C\frac{b-a}{n}\,\mathrm{d}x\\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1} C\frac{(b-a)^2}{n^2} = C\frac{(b-a)^2}{n}
\end{aligned}$$

Remarque 8. La démonstration montre la vitesse de convergence de la somme de Riemann vers l'intégrale. Dans la pratique, $a = 0$ et $b = 1$, ainsi les termes de la somme sont de la forme $f(k/n)/n$

Exemple 4. Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1} k^2$.

5 Extension au cas des fonctions à valeurs complexes

Définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes

Soit $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{C})$, alors on définit l'intégrale de f sur I par $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\,\mathrm{d}x$.

Proposition n° 5 : propriétés encore vraies pour l'intégrale des fonctions complexes

La linéarité, l'inégalité triangulaire (avec des modules), l'IPP, le changement de variable, le théorème fondamental de l'analyse, le théorème de Riemann sont encore vrais.

Proposition n° 6 : inégalité des accroissements finis pour $f\colon I \to \mathbb{C}$

Soient $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{C})$ et M tel que $|f'| \leqslant M$, alors pour tout $(x,x') \in [\,a\,;b\,]^2$, $\quad |f(x) - f(x')| \leqslant M|x - x'|$.

Démonstration de la proposition n° 6 : Soit $(x,y) \in [\,a\,;b\,]^2$

- Si $x = y$, rien à faire
- Si $x > y$, alors $f(x)-f(y) = \displaystyle\int_y^x f'(t)\mathrm{d}t$, en passant au module on a $|f(x)-f(y)| \leqslant \displaystyle\int_y^x |f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant \int_y^x M = M(x-y) = M|x-y|$
- Si $x < y$, alors on obtient, par ce qui précède $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$.

Dans tous les cas, on obtient l'inégalité obtenue. ■

6 Formule de Taylor reste intégrale et inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème n° 6 formule de Taylor avec reste intégral

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$. Pour tout $b \in I$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 9. Ce théorème donne l'écart entre $f(b)$ et le polynôme du développement limité de f en a sous la forme d'une intégrale (en générale difficile à calculer). Par contre, ici b est fixé et ne tend pas forcément vers a.

Démonstration du théorème n° 6 : Fixons $(a, x) \in I^2$ Posons l'hypothèse de récurrence suivante :

$$\mathscr{P}(n) :« \quad \forall f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K}) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t»$$

- Pour $n = 0$. Prenons $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.
- Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+2}(I, \mathbb{K})$. Alors, $f \in \mathscr{C}^{n+1}$ et on peut lui appliquer $\mathscr{P}(n)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \underbrace{\frac{(x-t)^n}{n!}}_{u'(t)} \times \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)}\,\mathrm{d}t$$

  Posons $v\colon t \mapsto f^{(n+1)}(t)$ et $u\colon t \mapsto \dfrac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, alors $(u, v) \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$ et on peut procéder à une intégration par parties :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \Big[\underbrace{\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(t)} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_{v(t)}\Big]_a^x - \int_a^x \underbrace{\frac{-(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}}_{u(t)} \times \underbrace{f^{(n+2)}(t)}_{v'(t)}\,\mathrm{d}t$$

  En calculant le terme entre crochets :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

  Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée.
- Ainsi, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ∎

Exemple 5. Majorer $|\sin(x) - x + x^3/6|$ pour $x \in \mathbb{R}$, puis $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ pour $x \geqslant -1/2$.

Théorème n° 7 : inégalité de Taylor-Lagrange

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ et $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in I$, $|f^{(n+1)}(t)| \leqslant M$. Pour tout $x \in I$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$