DS8

25 mai 2024

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Marchons dans les mines de la Moria (a.k.a. «fuyez pauvres fous !»)

Toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient n variables aléatoires notées $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ indépendantes suivant toutes une loi uniforme dans $\{-1, 1\}$. Ainsi, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(X_k = -1) = 1/2$.

1. Soit $k \in [\![1 ; n]\!]$. Calculer $\mathbb{E}(X_k)$ et $\mathbb{V}(X_k)$.

On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$

2. Calculer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$
3. Calculer la loi de $S_2 = X_1 + X_2$ (ce qui revient à calculer $\mathbb{P}(S_2 = 2)$, $\mathbb{P}(S_2 = 0)$ et $\mathbb{P}(S_2 = -2)$).
4. Les variables S_2 et X_1 sont-elles indépendantes ? On justifiera sa réponse.
5. Justifier que X_1 et $-X_1$ ont même loi mais que $X_1 \neq -X_1$.
6. Soient S et T deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que T et $-T$ ont la même loi. Montrer que $\mathbb{E}(\cos(S + T)) = \mathbb{E}(\cos(S))\mathbb{E}(\cos(T))$.
7. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\cos(tS_n)) = \cos^n(t)$.
8. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant 2p \leqslant n$ et $1 \leqslant 2p + 1 \leqslant n$. Calculer $\mathbb{P}(S_{2p+1} = 0)$ ainsi que $\mathbb{P}(S_{2p} = 0)$.

Les intégrales de Bruce Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\, \mathrm{d}t$.

1. Donner une primitive de cos ainsi que la dérivée de $t \mapsto \cos^{n+1}(t)$.
2. En intégrant par parties $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)\, \mathrm{d}t$, démontrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} W_n$.
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1 - u^2)^n\, \mathrm{d}u$ à l'aide des intégrales de Wallis.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t \sin(t) \cos^n(t)\, \mathrm{d}t$ à l'aide des intégrales de Wallis.

Je n'ai pas de titre drôle, mais vos réponses absurdes feront l'affaire

Déterminer le $DL_3(0)$ de $f \colon x \mapsto \dfrac{\exp(x)}{1 + \sin(x)}$. Sans calculer de dérivées, déterminer $f^{(i)}(0)$ pour $i \in [\![0 ; 3]\!]$.

Un exercice où vous allez prendre votre pied !

Dans un appartement, se trouve une famille de cinq personnes. Chaque membre de la famille possède une paire de chaussure. Dans cet exercice, faire les applications numériques sauf dans la première question.

1. Combien y a-t-il de façons d'aligner les chaussures contre le mur (pas forcément par paire).

Tôt, un samedi matin, un des membres de la famille part de l'appartement pour aller en DS de maths. Le but étant de partir sans bruit et sans allumer la lumière pour ne pas réveiller le reste de la famille.

2. En prenant deux chaussures au hasard, combien cela fait-il de possibilités ?
3. Combien y a-t-il de possibilités de prendre une paire valide (c'est-à-dire une droite et une gauche quelconques) ?
4. Combien y a-t-il de possibilités de prendre une paire valide dont les chaussures appartiennent à deux personnes différentes ?

On suppose maintenant que trois des paires sont rouges et les deux autres sont vertes.

5. Combien y a-t-il de possibilités de prendre une paire valide de couleur différente (et ainsi passer pour un clown auprès de la classe de PCSI) ?