

Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5. 1. Posons $f: t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$, cette fonction est définie et continue sur $]0; 1[$ (comme inverse d'une fonction continue et qui ne s'annule pas sur $]0; 1[$. Soit $x \in]0; 1[$, alors comme f est continue sur $[x^2; x]$, $\varphi(x)$ est bien définie.

2. Soit $x \in]0; 1[$, remarquons alors que $x^2 \leq x$. Par croissance de la fonction logarithme sur $[x^2; x]$, il vient

$$\forall t \in [x^2; x] \quad \ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$$

Par passage à l'inverse (décroissante sur \mathbb{R}_+^*), il s'ensuit

$$\forall t \in [x^2; x] \quad \frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$$

Ainsi, en intégrant sur $[x^2; x]$, on a par croissance de l'intégrale (avec $x^2 < x$)

$$\int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^x \frac{1}{\ln(x^2)} dt$$

Ainsi, $\frac{x - x^2}{\ln(x)} \leq -\varphi(x) \leq \frac{x - x^2}{\ln(x^2)}$. Ainsi, $\frac{x^2 - x}{2\ln(x)} \leq \varphi(x) \leq \frac{x^2 - x}{\ln(x)}$ Or $x^2 - x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0^-$ et $\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$,

par quotient, $\frac{x^2 - x}{\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, de même $\frac{x^2 - x}{2\ln(x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, par théorème d'encadrement, $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Ainsi, φ se prolonge en 0.

3. Comme f est continue sur $]0; 1[$, il existe F une primitive de f sur $]0; 1[$, ainsi pour tout $x \in]0; 1[$, $\varphi(x) = F(x^2) - F(x)$, or F et $x \mapsto x^2$ sont dérivables sur $]0; 1[$, par composition et soustractions de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $]0; 1[$ et

$$\forall x \in]0; 1[\quad \varphi'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = 2xf(x^2) - f(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Correction de l'exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $x \in]0; 1[$, $1 \leq 1+x \leq 2$. Comme la fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}_+^* , $1/2 \leq 1/(1+x) \leq 1$. En multipliant par x^n (qui est positif donc ne change pas le sens des inégalités), $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n$. Par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

En calculant l'intégrale de droite et celle de gauche il vient :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

Or, $1/(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $2/2(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. D'après le théorème d'encadrement, on $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Correction de l'exercice 7. 1. Si f est positive, alors $|f| = f$ et donc f et $|f|$ ont la même intégrale.

Réciproquement, supposons $\int_a^b |f| = \int_a^b f$. Ainsi, par linéarité de l'intégrale, $\int_a^b |f| - f = 0$. Or, comme $f \leq |f|$, $|f| - f \geq 0$. Ainsi, $|f| - f$ est une fonction positive, continue (par composée avec la valeur absolue qui est une fonction continue¹ et par différence) et d'intégrale nulle. D'après le théorème de nullité de l'intégrale, on en déduit que $|f| - f = 0$ soit $f = |f|$. Par conséquent, f est une fonction continue.

1. Car 1-lipschitzienne

2. Proposons deux méthodes :

- Comme f et $|f|$ sont continues sur $[a; b]$, leur intégrale est la limite des sommes de Riemann. Or, par inégalité triangulaire sur une somme :

$$\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f|$$

De plus, comme $\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f$ et que le module est continue, par caractérisation séquentielle de la limite, $\left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \int_a^b f \right|$. Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, on en déduit que $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

- $\int_a^b f$ est un complexe. Posons $\rho = \left| \int_a^b f \right|$ son module et θ un argument de ce complexe (si ce complexe est nul, prenons $\theta = 0$). Ainsi, $\int_a^b f = \rho e^{i\theta}$. Par conséquent, $\int_a^b e^{-i\theta} f = \rho$. Ainsi, par définition de l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes :

$$\rho = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(e^{-i\theta} f) \in \mathbb{R}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires d'un complexe, on en déduit que $\int_a^b \operatorname{Im}(e^{-i\theta} f) = 0$ et $\rho = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)$. Rappelons que $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, ainsi $\operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq |e^{-i\theta} f| = |f|$.

Par croissance de l'intégrale, il vient $\rho = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) \leq \int_a^b |f|$. Et comme $\rho = \left| \int_a^b f \right|$, on en déduit que $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$.

3. En reprenant les notations introduites dans la question précédente. Supposons $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$. Alors, par

linéarité de l'intégrale, $\int_a^b |f| - \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) = 0$. Subséquemment, $|f| - \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle, ainsi d'après le théorème de nullité de l'intégrale, $|f| - \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f) = 0$. Donc $|e^{-i\theta} f| = \operatorname{Re}(e^{-i\theta} f)$. D'où $e^{-i\theta} f = |e^{-i\theta} f|$. Ainsi, $f = e^{i\theta} |f|$. Ainsi, si $\left| \int_a^b f \right| = \int_a^b |f|$, alors il existe θ tel que $f = e^{i\theta} |f|$. Autrement, dit la fonction f prend ses valeurs sur une demi-droite partant de 0.

Réciproquement, s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta} |f|$, alors

$$\left| \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b e^{i\theta} |f| \right| = \left| e^{i\theta} \int_a^b |f| \right| = |e^{i\theta}| \times \left| \int_a^b |f| \right| = 1 \times \int_a^b |f|$$

En conclusion, $\int_a^b |f| = \left| \int_a^b f \right|$ ssi il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = e^{i\theta} |f|$.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. 1. $X^{2n} - 1$ est un polynôme de degré $2n$ qui admet $2n$ racines distinctes qui sont les racines $2n$ -ième de l'unité. Ces racines sont $e^{i\frac{2k\pi}{2n}}$ pour $k \in \llbracket 0; 2n-1 \rrbracket$. Comme $X^{2n} - 1$ est unitaire, on peut écrire :

$$\begin{aligned} X^{2n} - 1 &= \prod_{k=0}^{2n-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \prod_{k=n}^{2n-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \stackrel{j=2n-k}{=} \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \prod_{j=1}^n \left(X - e^{i\frac{(2n-j)\pi}{n}} \right) \\ &= \underbrace{(X-1)}_{k=0} \underbrace{(X+1)}_{j=n} \prod_{k=1}^{n-1} \left(\left(X - e^{i\frac{k\pi}{n}} \right) \left(X - e^{-i\frac{k\pi}{n}} \right) \right) \\ &= (X-1)(X+1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right) \end{aligned}$$

On remarque que $X - 1$ et $X + 1$ sont des polynômes irréductibles (car de degré 1) et pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $X^2 - 2X \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1$ est un polynôme réel de degré 2 dont les racines sont $e^{i\frac{k\pi}{n}}$ et $e^{-i\frac{k\pi}{n}}$ donc complexes non réelles, ainsi ce polynôme est irréductible. Ainsi, on a bien la décomposition en facteurs irréductibles de $X^{2n} - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $t \in [0; \pi]$:

- Si $t = 0$, alors $a^2 - 2a \cos(t) + 1 = (a-1)^2 > 0$ (car $a \neq 1$)
- Si $t = \pi$, alors $a^2 - 2a \cos(t) + 1 = (a+1)^2 > 0$ (car $a \neq -1$)
- Si $t \in]0; \pi[$, $X^2 - 2X \cos(t) + 1 = (X - e^{it})(X + e^{it})$, ainsi le polynôme $X^2 - 2X \cos(t) + 1$ est un polynôme de degré 2 n'ayant pas de racines réelles donc garde un signe constant sur \mathbb{R} , comme le coefficient devant le X^2 est positif, on en déduit que la fonction polynomiale associée ne prend que des valeurs strictement positives sur \mathbb{R} en particulier, $a^2 - 2a \cos(t) + 1 > 0$.

3. D'après ce qui précède, $t \mapsto a^2 - 2a \cos(t) + 1$ prend des valeurs strictement positives sur $[0; \pi]$ et est continue sur $[0; \pi]$, par composition avec le logarithme (fonction continue sur \mathbb{R}_+^*), $t \mapsto \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1)$ est continue sur $[0; \pi]$. En particulier, on peut appliquer le théorème des sommes de Riemann :

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \quad \text{où} \quad S_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_n = \underbrace{\frac{\pi}{n} \ln(a^2 + 1)}_{k=0} + \frac{\pi}{n} \ln \left(\prod_{k=1}^{n-1} \left(a^2 - 2a \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + 1 \right) \right) = \frac{\pi}{n} \ln(a^2 + 1) + \frac{\pi}{n} \ln \left(\frac{a^{2n} - 1}{(a-1)(a+1)} \right)$$

- Si $|a| < 1$, alors $a^{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et

$$\frac{a^{2n} - 1}{(a-1)(a+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-a)(a+1)} > 0$$

Par continuité du logarithme,

$$\ln \left(\frac{a^{2n} - 1}{(a-1)(a+1)} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{(1-a)(a+1)} \right)$$

Par produit et par somme, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

- Si $|a| > 1$, alors :

$$S_n = \frac{\pi}{n} \ln(a^2 + 1) - \frac{\pi}{n} \ln(a^2 - 1) + \frac{\pi}{n} \ln(a^{2n} - 1)$$

2. On pourrait gagner du temps en affirmant que l'on peut prendre $k \in \llbracket -n+1; n \rrbracket$ car c'est plus symétrique par rapport à 0.

Or, $\ln(a^{2n} - 1) = \ln(|a|^{2n} - 1) = \ln(|a|^{2n}(1 - |a|^{-2n})) = 2n \ln(|a|) + \ln(1 - |a|^{-2n})$. Ainsi,

$$S_n = \frac{\pi}{n} \ln(a^2 + 1) - \frac{\pi}{n} \ln(a^2 - 1) + 2\pi \ln(|a|) + \frac{\pi}{n} \ln(1 - |a|^{-2n})$$

Par produit et par somme $S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2\pi \ln(|a|)$. Ainsi :

$$\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } |a| < 1 \\ 2\pi \ln(|a|) & \text{si } |a| > 1 \end{cases}$$

Correction de l'exercice 13. 1. Comme g est continue sur $[0; 1]$, d'après le théorème des sommes de Riemann, $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_a^b g(x) dx$. Or, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $a \leq g(k/n) \leq b$. Par somme d'inégalités, on obtient $na \leq \sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) \leq nb$. En divisant par n ,

$$a \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) \leq b$$

Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, $a \leq \int_0^1 g(x) dx \leq b$. Par conséquent, $\int_0^1 g(x) dx \in [a; b]$.

2. Posons, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, $\lambda_k = 1/n$, alors $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = 1$. Ainsi, comme φ est convexe en utilisant le résultat de l'exercice 30 du TD11, on obtient :

$$\varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k g(k/n) \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (\varphi \circ g)(k/n) \quad (1)$$

Par composée de fonctions continues, $\varphi \circ g$ est continue, ainsi, d'après le théorème des sommes de Riemann

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k (\varphi \circ g)(k/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi \circ g)(k/n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 \varphi(g(x)) dx$$

De plus, d'après ce même théorème :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k g(k/n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 g(x) dx$$

Or φ est continue sur $[a; b]$ donc en $\int_0^1 g$, donc par caractérisation séquentielle de la limite

$$\varphi \left(\sum_{k=0}^{n-1} g(k/n) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi \left(\int_0^1 g(x) dx \right)$$

On utilise alors l'inégalité (1) et on passe à la la limite (les inégalités larges sont conservées par passage à la limite), ainsi

$$\varphi \left(\int_0^1 g \right) \leq \int_0^1 \varphi \circ g$$

Correction de l'exercice 14. 1. Pour tout $t > -1$,

- $f'(t) = \frac{1}{1+t}$,

- $f''(t) = \frac{-1}{(1+t)^2}$
- $f'''(t) = 2(1+t)(1+t)^4 = \frac{2}{(1+t)^3}$
- $f^{(4)}(t) = \frac{-6(1+t)^2}{(1+t)^6} = \frac{-6}{(1+t)^4}$.

On pose ainsi l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(k) : \langle f^{(k)} : t \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k} \rangle$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie, alors on peut dériver $f^{(k)}$ par la formule de l'inverse d'une fonction dérivable, ainsi

$$f^{(k)} : t \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)! \times k(1+t)^{k-1}}{(1+t)^{2k}} = \frac{(-1)^k k!}{(1+t)^{k+1}}$$

Dès lors, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie. Par récurrence, on a prouvé que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)} : t \mapsto \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0; 1]$, alors $|f^{(k)}(t)| = \frac{(k-1)!}{(1+t)^k} \leq \frac{(k-1)!}{1} = |f^{(k)}(0)|$. Ainsi, la valeur maximum de $f^{(k)}$ sur $[0; 1]$ est atteint en 0 et vaut $(k-1)!$.
3. Appliquons la formule de Taylor à $a = 0$ et $x = 1$, on obtient :

$$f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \ln(1) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Ainsi,

$$\left| \ln(2) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| dt \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times n! dt = \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, cela montre que $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2)$.

Correction de l'exercice 15. Notons $f : x \mapsto e^x$ et $b = 1$ et $a = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$, remarquons que $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b], \mathbb{R})$, appliquons donc la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

On a donc

$$e = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$$

Majorons la valeur absolue de $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$:

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| \leq \int_0^1 \left| \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \right| dt \leq \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^1 dt = e^1 \frac{1}{(n+1)!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Ce qui prouve que $\left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien une suite convergente et qu'elle converge vers e .

3. Dans le chapitre sur les séries, on notera $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$.

Correction de l'exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, appliquons la formule d'intégration par parties à f et $t \mapsto \frac{e^{int}}{in}$ qui sont bien des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$ on a donc :

$$\int_a^b f(t)e^{int} dt = \left[f(t) \frac{e^{int}}{in} \right]_a^b - \int_a^b f'(t) \frac{e^{int}}{in} dt$$

On remarque que $\left| f(b) \frac{e^{inb}}{in} \right| = \frac{|f(b)|}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc $f(b) \frac{e^{inb}}{in} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, de même $f(a) \frac{e^{ina}}{in} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. De plus,

$$\left| \int_a^b f'(t) \frac{e^{int}}{in} dt \right| \leq \int_a^b |f'(t)| \frac{1}{n} dt \leq \frac{\int_a^b |f'(t)| dt}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Donc, par somme de termes tendant vers 0, on a montré que

$$\int_a^b f(t)e^{int} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18. La fonction g est continue sur $[a; b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, elle est bornée et atteint ses bornes : il existe $(\alpha, \beta) \in [a; b]^2$ tel que pour tout $x \in [a; b]$, $g(\alpha) \leq g(x) \leq g(\beta)$. Pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \geq 0$, ainsi $f(x)g(\alpha) \leq f(x)g(x) \leq g(\beta)f(x)$, par croissance de l'intégrale, on a donc :

$$g(\alpha) \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x)g(\alpha) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b g(\beta)f(x) dx = g(\beta) \int_a^b f(x) dx$$

Comme f est positive, $\int_a^b f(x) dx \geq 0$. Distinguons les cas :

- Si $\int_a^b f(x) dx > 0$, alors

$$g(\alpha) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b f(x) dx} \leq g(\beta)$$

Comme g est continue sur $[\alpha; \beta]$ (ou $[\beta; \alpha]$ si $\beta < \alpha$), on peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists c \in [\alpha; \beta] \quad g(c) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}$$

Ainsi, pour un tel $c \in [a; b]$, $\int_a^b f(x)g(x) dx = g(c) \int_a^b f(x) dx$.

- Si $\int_a^b f(x) dx = 0$, alors comme f est positive et continue, d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale, on peut en conclure que $f = 0$, ainsi l'égalité demandée sera vraie pour tout $c \in [a; b]$.

Correction de l'exercice 19. • Par linéarité de l'intégrale $\int_0^1 f(t) - t dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t dt = 0$.

- Supposons que pour tout $t \in [0; 1]$, $f(t) > t$, alors $f(t) - t > 0$ et donc par l'intégrale d'une fonction continue, positive et au moins strictement positive, on aurait $\int_0^1 f(t) - t dt > 0$, ce qui n'est pas le cas, donc notre hypothèse est absurde, donc il existe $t_0 \in [0; 1]$ tel que $f(t_0) - t_0 \leq 0$

- De même, supposons que pour tout $t \in [0; 1]$ $t > f(t)$, alors $t - f(t) > 0$ et donc par l'intégrale d'une fonction continue, positive et au moins strictement positive, on aurait $\int_0^1 t - f(t) dt > 0$, ce qui n'est pas le cas, donc notre hypothèse est absurde, donc il existe $t_1 \in [0; 1]$ tel que $t_1 - f(t_1) \leq 0$.
- Posons donc $g: t \mapsto f(t) - t$, g est continue sur $[0; 1]$, $g(t_0) \leq 0$ et $g(t_1) \geq 0$, par application du théorème des valeurs continues, il existe $t_2 \in [t_0; t_1]$ (ou $[t_1; t_0]$) tel que $g(t_2) = 0$, donc $f(t_2) - t_2 = 0$, ainsi t_2 est un point fixe de f .

Correction de l'exercice 20. 1. Notons $g: t \mapsto \frac{e^t}{1+t}$ cette fonction est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (comme quotient de fonctions continues et **dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$**). Or d'après le cours, $\int_0^x g(t) dt$ existe si et seulement si g est continue sur $[0; x]$. Donc, pour que $f(x)$ existe, il faut et suffit que $[0; x] \subset \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ceci est possible si et seulement si $x > -1$. Ainsi l'ensemble de définition de f est $] -1; +\infty [$.

2. Comme g est continue sur $] -1; +\infty [$, $x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ est dérivable comme primitive de g . Ainsi, par produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur $] -1; +\infty [$. De plus, pour tout $x > -1$, on a :

$$f'(x) = \int_0^x g(t) dt + xg(x) = \int_0^x \frac{e^t}{1+t} dt + x \frac{e^x}{1+x}$$

On remarque que g est une fonction positive sur $] -1; +\infty [$. Ainsi, pour $x > 0$, $\int_0^x g(t) dt \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive dont les bornes sont dans le bon sens), $x > 0$ et $g(x) \geq 0$, donc par produit et somme de termes positifs, $f'(x) \geq 0$. Donc f' est positive sur $[0; +\infty [$, f est donc croissante sur $[0; +\infty [$.

Si $x \in] -1; 0]$, alors $\int_0^x g(t) dt = -\int_x^0 g(t) dt$ et $\int_x^0 g(t) dt \geq 0$ (intégrale d'une fonction positive dont les bornes sont dans le bon sens), ainsi $\int_0^x g(t) dt \leq 0$. De plus, $x < 0$ et $g(x) \geq 0$, donc $xg(x) \leq 0$, par somme de termes négatifs, $f'(x) \leq 0$. Donc f' est négative sur $] -1; 0]$, f est donc décroissante sur $] -1; 0]$.

3. Soit $x \in] -1; 0 [$, alors $f(x) = -x \int_x^0 g(t) dt$. Remarquons que pour tout $t \in [x; 0]$, $\frac{e^t}{1+t} \geq \frac{e^{-1}}{1+t}$, par croissance de l'intégrale sur $[x; 0]$, on a

$$\int_x^0 g(t) dt \geq \int_x^0 \frac{e^{-1}}{1+t} dt = -e^{-1} \ln(1+x)$$

Multiplions cette inégalité par $-x$ (le sens de l'inégalité sera conservé car $-x > 0$), on obtient $f(x) \geq e^{-1} x \ln(1+x)$. Or $\lim_{x \rightarrow -1^+} x \ln(1+x) = +\infty$. Donc par minoration, on a $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$.

Correction de l'exercice 21. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $F: y \mapsto \int_0^y e^{t^2} dt$. Comme $f: t \mapsto e^{t^2}$ est continue, le théorème fondamental de l'analyse stipule que F est une primitive de f , ainsi F est dérivable sur \mathbb{R} et $F' = f > 0$. Ceci prouve que F est strictement croissante sur \mathbb{R} . Soit $y \in \mathbb{R}$, remarquons aussi que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{t^2} \geq 1$, donc par croissance de l'intégrale $F(y) \geq \int_0^y 1 dt$ si $y \geq 0$ et $F(y) \leq \int_0^y 1 dt$ si $y < 0$. Ceci prouve par majoration/minoration que $\lim_{y \rightarrow +\infty} F(y) = +\infty$ tandis que $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = -\infty$. Ainsi, F est une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On cherche donc à montrer que l'équation d'inconnue $y \in \mathbb{R}$

$$F(y) - F(x) = 1$$

-
4. Attention à ce cas-là, les bornes ne sont pas dans le bon sens, ainsi écrire, au besoin, $F(y) = -\int_y^0 e^{t^2} dt \leq -\int_y^0 1 dt = \int_0^y 1 dt$.

a une unique solution, or $F(y) - F(x) = 1$ si et seulement si $y = F^{-1}(1 + F(x))$. Dès lors $a(x)$ existe, est unique et vaut $F^{-1}(1 + F(x))$.

2. Comme $F' = f$ ne s'annule pas et que F est de classe \mathcal{C}^1 , d'après le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque, F^{-1} est aussi \mathcal{C}^1 , ainsi $a: x \mapsto a(x) = F^{-1}(1 + F(x))$ est de classe \mathcal{C}^1 par composition de fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Remarquons que $\int_x^{x+1} e^{t^2} dt \geq \int_x^{x+1} dt$, ainsi, $F(x+1) - F(x) \geq 1$, donc

$$F(x+1) \geq F(x) + 1 \geq F(x)$$

Comme F est continue, le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'il existe $y \in [x; x+1]$ tel que $F(y) = F(x) + 1$, par unicité de $a(x)$, on a alors $y = a(x) \in [x; x+1]$, soit $x \leq a(x) \leq x+1 \underset{+\infty}{\sim} x$, par théorème d'encadrement $a(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.

Correction de l'exercice 22. 1. Posons $x = \frac{\pi}{2} - t$, alors $dx = -dt$. Ainsi, $W_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right)^n (-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx$.

2. Commençons par linéariser les puissances de cosinus, soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos^2(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^2 = \frac{e^{i2t} + 2 + e^{-i2t}}{4} = \frac{2\cos(2t) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2t)}{2} \\ \cos^3(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^3 = \frac{e^{i3t} + 3e^{i2t}e^{-it} + 3e^{it}e^{-i2t} + e^{-i3t}}{8} \\ &= \frac{2\cos(3t) + 6\cos(t)}{8} = \frac{\cos(3t) + 3\cos(t)}{4} \end{aligned}$$

$$\bullet W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\bullet W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\bullet W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet W_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3t) + 3\cos(t)}{4} dt = \left[\frac{\sin(3t)}{12} + \frac{3\sin(t)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0; \pi/2]$, alors comme $\cos(t) \in [0; 1]$, $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$, par croissance de l'intégrale, $W_{n+1} \leq W_n$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme, pour tout $t \in [0; \pi/2]$, $\cos^n(t) \geq 0$, par positivité de l'intégrale, $W_n \geq 0$. Ainsi, $(W_n)_n$ est une suite décroissante et minorée (par 0 par exemple). Par conséquent, d'après le théorème de la limite monotone, $(W_n)_n$ est une suite convergente.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $f: t \mapsto \cos^n(t)$ est continue et positive sur $[0; \pi/2]$, de plus $f(0) = 1 > 0$, d'après le théorème de stricte positivité de l'intégrale, $W_n > 0$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour calculer W_{n+2} , intégrons par parties, posons $u = \sin$ et $v = \cos^{n+1}$, u et v sont de classe

\mathcal{C}^1 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ⁵ et $u' = \cos$ et $v' = -(n+1)\sin \cos^n$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [\sin(t) \cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2(t) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \\ W_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2}W_n \end{aligned}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors d'après la question précédente,

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = [(n+2)W_{n+2}]W_{n+1} = [(n+1)W_n]W_{n+1}$$

Ceci montre que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. La constante est donc $W_1W_0 = \pi/2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \frac{\pi}{2}$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(W_n)_n$ est décroissante, $W_{n+1} \leq W_n$, en divisant par W_n qui est strictement positif, on obtient $\frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. De plus, $(n+1)/(n+2) = \frac{W_{n+2}}{W_{n+1}} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n}$. On en déduit les inégalités demandés.

9. Comme $\frac{n+1}{n+2} \sim \frac{n}{n} = 1$, on en déduit que $\frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, par théorème d'encadrement, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Ainsi, $W_{n+1} \sim W_n$.

10. On sait que $(n+1)W_{n+1}W_n \sim \pi/2$, en divisant par $n+1$, on obtient : $W_nW_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$. De surcroît, $W_{n+1} \sim W_n$, on obtient $W_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$ d'où

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Comme $\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et que deux suites équivalentes ont même limite, on en déduit que $W_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

11. Pour les termes pairs il y a deux méthodes : une récurrence qui suppose que l'on connaisse la formule à montrer, ainsi qu'une méthode avec des ... qui permet de trouver la formule. De même pour les termes impairs :

- Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(p) : \ll W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \gg$. Pour $p=0$, $\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0 = W_{2 \times 0}$ et Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vérifiée, alors, en utilisant la question 6, on obtient

$$W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2(p+1)2(p+1)2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$.

- On montre la formule $W_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^{2p}(p!)^2}$ par une récurrence similaire.
- Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors en utilisant la question 6, avec $n = 2p - 2$, on obtient

$$W_{2p} = W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n = \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2}$$

5. Il est conseillé de préciser qui sont u et v et qu'elles sont de classe \mathcal{C}^1 .

En utilisant la question 6 avec $n = 2p - 4$, on obtient $W_{2p-2} = W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n = \frac{2p-3}{2p-2} W_{2p-4}$.

Ainsi,

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times W_{2p-4}$$

En continuant ainsi, de proche en proche, on obtient :

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-5}{2p-4} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times W_0$$

Ainsi,

$$W_{2p} = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1)}{\prod_{k=1}^p (2k)} W_0 = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1) \prod_{k=1}^p (2k)}{\left(\prod_{k=1}^p (2k)\right)^2} W_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} W_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

•

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} W_{2p-3} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times W_1$$

Donc

$$W_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k)}{\prod_{k=1}^p (2k+1)} W_1 = \frac{\left(\prod_{k=1}^p (2k)\right)^2}{\prod_{k=1}^p (2k+1) \prod_{k=1}^p (2k)} W_1 = \frac{2^{2p} (p!)^2}{(2p+1)!}$$

12. Ainsi, $p! \sim C\sqrt{p} \left(\frac{p}{e}\right)^p$, et $(2p)! \sim C\sqrt{2p} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}$, on trouve par quotient d'équivalents que

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{C\sqrt{2p} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{2^{2p} \left(C\sqrt{p} \left(\frac{p}{e}\right)^p\right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{C\sqrt{2p}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

Ainsi, par division, $\frac{\pi\sqrt{4p}}{C\sqrt{2p}\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{C} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$ Comme $\frac{\sqrt{2\pi}}{C}$ est une constante qui tend vers 1, on a que $\frac{\sqrt{2\pi}}{C} = 1$, soit $C = \sqrt{2\pi}$. Par conséquent, $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.