Chapitre 22

Espaces Préhilbertiens réels

Le but de ce chapitre est d'étudier les produits scalaires dans des espaces vectoriels quelconques, contrairement à la physique ou à la SI où vous êtes habitués à utiliser un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$.

Table des matières

Dans tout ce chapitre E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E.

1 Produit scalaire et norme associée

Définition d'un produit scalaire, d'un espace préhilbertien réel et d'un espace euclidien

On dit que $\varphi\colon E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ (on note souvent $\langle x, y\rangle = (x|y) = x \cdot y = \varphi(x, y)$) est un produit scalaire sur E si φ est

- **symétrique** si pour tout $(x, y) \in E^2$, $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- **bilinéaire** si pour tout $x \in E$, $y \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire, pour tout $y \in E$, $x \longmapsto \varphi(x, y)$ est linéaire.
- **positive** si pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) \geqslant 0$
- **définie** si pour tout $x \in E$, $\varphi(x, x) = 0 \implies x = 0_E$

(E, φ) est appelé **préhilbertien réel**. Si E est de dimension finie alors (E, φ) est appelé **espace euclidien**.

Exemples de produits scalaires usuels sur les espaces usuels

- $(X, Y) \longmapsto X^\top Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i Y_i$ est un produit scalaire (dit usuel) sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.
- $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_a^b fg$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ (où $a < b$).
- $(A, B) \longmapsto \sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} A_{i,j} B_{i,j} = \operatorname{tr}(AB^\top)$ est un produit scalaire (dit usuel) sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 1. $(P, Q) \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} P(t)Q(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 2. $(X, Y) \mapsto$ cov(X,Y) est une forme symétrique, bilinéaire et positive.

Définition de la norme associée au produit scalaire

L'application $\|\ \|\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{cases}$ est appelée **norme associée au produit scalaire**. Ainsi, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

À partir de maintenant, $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ désigne un préhilbertien réel et $\|\ \|$ est la norme associée à E.

Proposition n° 1 : propriétés de la norme associée à un produit scalaires, identité remarquable

Pour tout $(x, y) \in E^2$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geqslant 0$ et $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$
2. $\|x\| = 0 \implies x = 0_E$
3. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
4. $\left\|\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 + 2 \times \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \langle x_i, x_j\rangle$
5. $\langle x, y\rangle = \dfrac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$formule de polarisation

Théorème n° 1 : inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(x, y) \in E^2$: $\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle x, x\rangle \times \langle y, y\rangle$ et $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \times \|y\|$

De plus, $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \times \|y\|$ ssi (x, y) est liée ($i.e.$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

Démonstration du théorème n° 1 : Soit $\langle \quad , \quad \rangle$ une forme bilinéaire, symétrique et positive. Fixons $(x,y) \in E^2$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P(t) = \langle x+ty, x+ty \rangle = \langle x,x \rangle + 2t\langle x,y \rangle + t^2 \langle y,y \rangle \geqslant 0$. Il y a deux cas :

- Si $\langle y,y \rangle \neq 0$, alors P est polynomiale de degré 2 toujours positive ainsi son discriminant est négatif, donc $\Delta = 4\langle x,y \rangle^2 - 4\langle x,x \rangle \langle y,y \rangle \leqslant 0$. Soit $\langle x,y \rangle^2 \leqslant \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle$.
- Si $\langle y,y \rangle = 0$, alors $t \longmapsto \langle x,x \rangle + 2t\langle x,y \rangle \geqslant 0$ (équation d'une droite) donc $2\langle x,y \rangle = 0$ ainsi, $0 = \langle x,y \rangle^2 \leqslant \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle = 0$

Prenons maintenant $\langle \quad , \quad \rangle$ un produit scalaire. On remarque que si $x = \lambda y$ ou l'inverse, alors il y a bien égalité. Réciproquent s'il y a égalité, alors dans le cas où $\langle y,y \rangle = 0$, on a $y = 0$ donc $y = 0x$. Dans le cas où $\langle y,y \rangle \neq 0$, cela veut dire que $\Delta = 0$, ainsi il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\langle x+t_0y, x+t_0y \rangle = 0$, donc $x + t_0 y = 0$ et ainsi $y = -t_0 x$. ■

- Inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$:

$$\forall (f,g) \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2 \qquad \left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2\right)\left(\int_a^b g^2\right) \qquad \text{et} \qquad \left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \times \sqrt{\int_a^b g^2}$$

- Inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\mathbb{R}^n$: soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n {x_i}^2\right) \times \left(\sum_{i=1}^n {y_i}^2\right) \qquad \text{et} \qquad \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n {x_i}^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n {y_i}^2}$$

Remarque 1. Soit $(x,y) \in (E\backslash\{0_E\})^2$, $\|x\|$ est la longueur du vecteur x et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe $\theta \in \mathbb{R}$, tel que $\cos(\theta) = \langle x,y \rangle / (\|x\| \times \|y\|)$, ainsi $\langle x,y \rangle = \|x\|\|y\|\cos(\theta)$. On dit que θ est l'angle (non orienté) des vecteurs x et y. À partir du produit scalaire, on définit donc les notions d'angles et de longueurs.

Corollaire : inégalité triangulaire et cas d'égalité

Pour tout $(x,y) \in E^2$ $\qquad \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

De plus : $\qquad \forall (x,y) \in E^2 \qquad \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \geqslant 0 \quad x = \lambda y \quad \text{ou} \quad y = \lambda x$

Démonstration du corollaire : En développant la norme au carrée de $x + y$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Supposons qu'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$. Si $x = \lambda y$, alors

$$\|x+y\| = \|\lambda y + y\| = \|(\lambda+1)y\| = |\lambda+1|\|y\| = (\lambda+1)\|y\|$$

Tandis que $\|x\| + \|y\| = \|\lambda x\| + \|y\| = |\lambda|\|y\| + \|y\| = (\lambda+1)\|y\|$. Ainsi, il y a égalité. Idem dans le cas $y = \lambda x$.

Réciproquement, supposons que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$, remarquons que si $x = 0_E$ on a bien $x = \lambda y$ avec $\lambda = 0 \geqslant 0$. Supposons donc que $x \neq 0_E$, alors en mettant le tout au carrée, on obtient

$$\|x\|^2 + 2\langle x,y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

Ainsi $\langle x,y \rangle = \|x\|\|y\|$, par le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz, on obtient, qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$, ainsi $\lambda \langle x,x \rangle = \|x\|\|y\| \geqslant 0$, par division par $\langle x,x \rangle > 0$, on trouve que $\lambda \geqslant 0$. ■

2 Orthogonalité

2.1 Vecteurs orthogonaux, famille orthogonale, SEVs orthogonaux, orthogonal d'un SEV

Définition de l'orthogonalité et d'une famille orthogonale

On dit que x et y sont **orthogonaux** si $\langle x,y \rangle = 0$, dans ce cas on note $x \perp y$.
On dit que $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I}$, une famille de vecteurs de E, est **orthogonale** si les vecteurs de $\mathscr{F}$ sont deux à deux orthogonaux, autrement dit si : $\qquad \forall (i,j) \in I^2 \qquad i \neq j \implies \langle x_i, x_j \rangle = 0$

Exemple 3.
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de E (y compris à lui même).
- Muni du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$, $(1,3,1)$ et $(0,1,-3)$ sont orthogonaux.

Théorème n° 2 de Pythagore *(le logo colle au théorème pour une fois)*

Si $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ est une famille orthogonale finie de E, alors : $\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$.

Remarque 2. La réciproque est fausse (sauf si $p=2$). Prendre $x=(1,0,0)$, $y=(1,1,0)$, $z=(-1,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition n° 2 : liberté d'une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul

Soit $\mathscr{F}$ une famille orthogonale de E **ne contenant pas le vecteur nul**, alors $\mathscr{F}$ est libre.

Démonstration de la proposition n° 2 : Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille orthogonale vecteurs de E non nuls. Montrons que $\mathscr{F}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Supposons $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$. Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$, alors :

$$0 = \langle e_j, 0_E \rangle = \left\langle e_j, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle e_j, e_k \rangle = \lambda_j \langle e_j, e_j \rangle$$

Or, comme $e_j \neq 0_E$, on en déduit que $\langle e_j, e_j \rangle \neq 0$. Ainsi, $\lambda_j = 0$. Et ce pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$. Ceci montre que $\mathscr{F}$ est une famille libre de E. ■

Définition de sous-espaces orthogonaux

On dit que F et G sont **orthogonaux** si pour tout $(f,g) \in F \times G$, $\langle f, g \rangle = 0$ (on note $F \perp G$ dans ce cas).

Remarque 3. Si $F \perp G$, alors $F \oplus G$. Si $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est une famille orthogonale, alors $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_p) \perp \mathrm{vect}(x_{p+1}, \dots, x_n)$.

Définition de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit X une partie de E. L'**orthogonal** de X est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de X :
$X^\perp = \{y \in E \qquad \forall x \in X \quad \langle y, x \rangle = 0\}$

Exemple 4. Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, si $X = \{(1,0,0)\}$ que vaut $X^\perp$ et dans le cas où $X = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$?

Remarque 4. Il ne faut pas confondre le fait que deux SEV soient orthogonaux avec l'orthogonal d'un SEV : si $F \perp G$ cela ne veut pas dire que $G = F^\perp$. Cependant, $F \perp G$ ssi $G \subset F^\perp$.

Proposition n° 3 : propriétés de l'orthogonal

Soit $X \subset E$ et F et G deux sev de E.

1. $X^\perp$ est un SEV de E
2. $F \perp F^\perp$
3. $F \oplus F^\perp$
4. $F \subset (F^\perp)^\perp$
5. $E^\perp = \{0_E\}$
6. $\{0_E\}^\perp = E$
7. $F \subset G \Longrightarrow G^\perp \subset F^\perp$

Attention à la dimension infinie

Si E est de dimension infinie, l'inclusion 4 peut être stricte.

2.2 Famille orthonormées/orthonormales, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Définition d'une famille orthonormée (ou orthonormale)

Un vecteur $x \in E$ est dit **unitaire** si $\langle x, x\rangle = 1$ (c'est équivalent à $\|x\| = 1$).
Une famille $\mathscr{F} = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ orthogonale de vecteurs unitaires de E est dite **orthonormée** (ou **orthonormale**) :
$\forall (i, j) \in [\![1\,;p]\!]^2 \qquad \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}$

Exemple 5. Pour les produits scalaires usuels, les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont orthonormées.

Comment obtenir des bases orthonormées ? Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathscr{B} = (f_1, f_2, \ldots, f_r)$ une base de F. Construisons par étapes $\mathscr{B}' = (g_1, g_2, \ldots, g_r)$ une base orthonormée de F telle que pour tout $q \in [\![1\,;r]\!]$, $\operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_q) = \operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_q)$:

1. Posons $g_1 = f_1/\|f_1\|$.
2. Posons $u = f_2 - \langle f_2, g_1\rangle g_1$, puis $g_2 = u/\|u\|$.
3. Posons $u = f_3 - \langle f_3, g_1\rangle g_1 - \langle f_3, g_2\rangle g_2$ puis $g_3 = u/\|u\|$.

$\vdots$

q. À $(g_1, g_2, \ldots, g_{q-1})$ déjà créée, posons $u = f_q - \sum\limits_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i\rangle g_i$ puis $g_q = \dfrac{u}{\|u\|}$.

$\vdots$

Démonstration de l'algorithme de Gram-Schmidt : Posons l'hypothèse de récurrence, pour $q \in [\![1\,;r]\!]$, $\mathscr{P}(q)$: «Il existe $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une famille de vecteurs orthonormée tel que $\operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_q) = \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_q)$.»

- Initialisation : si $q = 1$, comme $f_1 \neq 0_E$ (car f_1 appartient à une famille libre), alors on pose $g_1 = f_1/\|f_1\|$, ainsi $\|g_1\| = 1$, (g_1) est donc une famille orthonormée et on a $\operatorname{vect}(g_1) = \operatorname{vect}(f_1)$. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $q \in [\![2\,;r]\!]$, supposons $\mathscr{P}(q-1)$ vraie et montrons que $\mathscr{P}(q)$ est vraie. Il existe $(g_1, g_2, \ldots, g_{q-1})$ une famille de vecteurs orthonormée tel que $\operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_{q-1}) = \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_{q-1})$. Le but est donc de rajouter g_q un vecteur unitaire orthogonale à tous les g_i pour $i \leqslant q-1$ tel que $\operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_q) = \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_q)$. Posons $u = f_q - \sum\limits_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i\rangle g_i$. Soit $j \in [\![1\,;q-1]\!]$, par linéarité à droite du produit scalaire
$$\langle u, g_j\rangle = \langle f_q, g_j\rangle - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i\rangle \underbrace{\langle g_i, g_j\rangle}_{\delta_{i,j}} = \langle f_q, g_j\rangle - \langle f_q, g_i\rangle = 0$$
Ainsi, u est orthogonal à tous les g_i pour $i \in [\![1\,;q-1]\!]$, on souhaite poser $g_q = u/\|u\|$, mais est-ce que $u = 0_E$? Supposons $u = 0_E$. Soit $i \in [\![1\,;q-1]\!]$, alors $g_i \in \operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_{q-1}) = \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_{q-1})$, ainsi, par combinaison linéaire, on obtient $f_q = \sum\limits_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i\rangle g_i \in \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_{q-1})$. Ceci contredit le fait que $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ soit libre. Donc $u \neq 0_E$, on pose alors $g_q = u/\|u\|$. Pour tout $i \in [\![1\,;q-1]\!]$, $\langle g_q, g_i\rangle = \dfrac{1}{\|u\|} \langle u, g_i\rangle = 0$ et on avait déjà, par hypothèse de récurrence, pour tout $(i, j) \in [\![1\,;q-1]\!]^2$, $\langle g_i, g_j\rangle = \delta_{i,j}$, également $\|g_q\| = 1$. Ainsi, la famille $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une famille orthonormée. Nous avons déjà dit que pour tout $i \in [\![1\,;q-1]\!]$, $g_i \in \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_{q-1}) \subset \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_q)$, ainsi,
$$g_q = \frac{1}{\|u\|}\left(f_q - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i\rangle g_i\right) \in \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_q)$$
Par stabilité par combinaison linéaire, $\operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_q) \subset \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_q)$. Or, $(f_1, f_2, \ldots, f_q)$ est libre, donc
$$\dim(\operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_q)) = q$$
De plus, $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une famille de vecteurs de norme 1 (donc cette famille ne contient pas le vecteur nul) est elle est orthogonale donc libre, de même $\dim(\operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_q)) = q$, par inclusion et égalité des dimensions, $\operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_q) = \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_q)$, ainsi $\mathscr{P}(q)$ est vraie.
- Par récurrence finie, pour tout $q \in [\![1\,;r]\!]$, $\mathscr{P}(q)$ est vraie.

Remarque 5. Il n'y a pas unicité d'une telle famille, car à chaque étape, on peut poser $g_q = \pm u/\|u\|$, on a unicité si on rajoute la condition $\langle g_q, f_q\rangle > 0$.

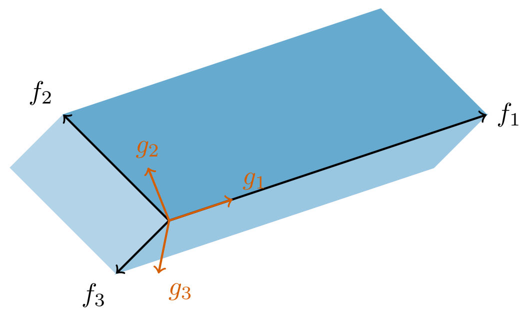

FIGURE 1 – Principe de Gram-Schmidt : g_1 est unitaire et proportionnel à f_1, g_2 est unitaire et appartient au plan défini par f_1 et f_2, g_3 est unitaire et appartenant à l'espace engendré par f_1, f_2 et f_3.

Remarque 6. Comme $u = f_q - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle g_i$, alors $\|u\|^2 = \|f_q\|^2 - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle^2$ et $g_q = (f_q - \sum_{i=1}^{q-1} \langle f_q, g_i \rangle g_i)/\|u\|$

Exemple 6. Appliquer Gram-Schmidt à $\mathscr{F} = (f_1, f_2, f_3)$ dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel avec $f_1 = (1,1,0,0)$, $f_2 = (0,1,1,0)$ et $f_3 = (0,1,1,1)$.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Remarque 7. Soient $F = \operatorname{vect}(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ et $x \in E$: $$x \in F^\perp \iff \forall i \in [\![1 ; r]\!] \quad x \perp f_i.$$

Théorème n° 3 : supplémentaire orthogonal

Si F est un SEV de **dimension finie** de E. Alors, $$E = F \oplus F^\perp$$
La projection sur F parallèlement à $F^\perp$, appelé **projection orthogonale**, est notée p_F.

En notant $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ une base orthonormée de F, on a $$p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \langle x, g_i \rangle g_i$$

Remarque 8. Il n'y a pas unicité des supplémentaires de F. Mais il y a unicité du supplémentaire orthogonal : si $E = F \oplus G$ et $F \perp G$, alors $G = F^\perp$. On dit que $F^\perp$ est **le supplémentaire orthogonal** de F.

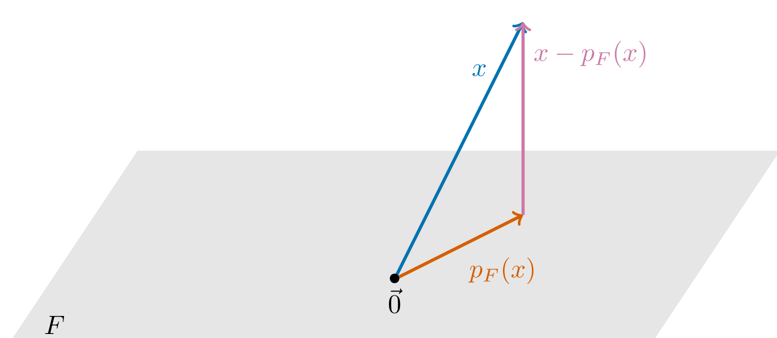

FIGURE 2 – La projection orthogonale sur F du vecteur x.

Démonstration du théorème n° 3 : Comme F est de dimension finie, il admet une base, de plus, par le procédé de Gram-Schmidt, on peut transformer cette base en une base orthonormée $\mathscr{B} = (g_1, g_2, \ldots, g_r)$. On sait déjà que $F \oplus F^\perp$ et que $F \oplus F^\perp \subset E$. Soit $x \in E$, montrons que $x \in F + F^\perp$:

- Analyse : supposons que $x \in F + F^\perp$, alors il existe $f \in F$ et $g \in F^\perp$ tel que $x = f + g$, de plus, $f \in F = \operatorname{vect}(g_1, g_2, \ldots, g_r)$, donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$ tel que $f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i g_i$. Dès lors $x = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i + g$. Fixons $j \in [\![1 ; p]\!]$, alors $\langle x, g_j \rangle = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \langle g_i, g_j \rangle + \langle g, g_j \rangle = \lambda_j$. Ainsi, $f = \sum_{i=1}^{r} \langle x, g_i \rangle g_i$ et $g = x - \sum_{i=1}^{r} \langle x, g_i \rangle g_i$.
- Synthèse : posons $f = \sum_{i=1}^{r} \langle x, g_j \rangle g_j$ et $g = x - \sum_{i=1}^{r} \langle x, g_i \rangle g_i$. Alors $f \in F$, $f + g = x$. Montrons que $g \in F^\perp$. Soit $j \in [\![1 ; p]\!]$, alors $\langle g, g_j \rangle = \langle x, g_j \rangle - \sum_{i=1}^{p} \langle x, g_i \rangle \langle g_i, g_j \rangle = 0$. Dès lors, pour tout $j \in [\![1 ; r]\!]$, $\langle g, g_j \rangle = 0$, par la remarque 7, $g \in F^\perp$.

Ainsi, $x \in F \oplus F^{\perp}$. Ce qui montre que $E = F \oplus F^{\perp}$. ∎

Caractérisation du projeté orthogonal avec une base (quelconque) de F

Soient F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E de base $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ et $x \in E$.

- $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - p_F(x) \in F^{\perp}$.
- $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que pour tout $i \in [\![1\,; r]\!]$, $\langle x - p_F(x), f_i \rangle = 0$

Remarque 9. On peut calculer $p_F(x)$: en écrivant $p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f_i$ et en résolvant le système d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$.

Théorème n° 4 : minimisation de la distance entre un vecteur et un SEV F de dim finie

Si F est un SEV de **dimension finie** de E et $x \in E$, alors $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que

$$\|x - p_F(x)\| = \inf_{f \in F} \|x - f\|$$

Remarque 10. Ainsi, $p_F(x)$ est le vecteur de F le plus proche de x pour la norme. $\|x - p_F(x)\|$ est **la distance entre le vecteur x et l'espace vectoriel F**. On note $d(x, F) = \inf_{f \in F} \|x - f\| = \|x - p_F(x)\|$.

Exemple 7. Si $E = \mathbb{R}[X]$ calculer la distance de X^2 à $F = \mathbb{R}_1[X]$ dans E muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

4 Spécificités des espaces euclidiens

Dans toute cette partie, on considère $(E, \langle\ \ ,\ \ \rangle)$ un espace euclidien.

Théorème n° 5 : existence de base orthonormée/théorème de la base incomplète orthonormée

Il existe $\mathscr{B}$ une base de E orthonormée. Toute famille $\mathscr{L}$ orthonormée peut être complétée en une base orthonormée.

Proposition n° 4 : calculs dans une base orthonormée

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soient $(x, y) \in E^2$,Notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$.

1. $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$
2. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \times \langle y, e_i \rangle$
3. $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2$
4. $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, e_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle x, e_n \rangle \end{pmatrix}$
5. $\langle x, y \rangle = X^{\top} Y$
6. $\|x\| = \sqrt{X^{\top} X}$

Théorème n° 6 : dimension du supplémentaire orthogonal

Si F un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim\left(F^{\perp}\right) = \dim(E) - \dim(F)$

Remarque 11. Soit F un sous espace vectoriel de E, alors $F = (F^{\perp})^{\perp}$

5 Exercice classique et méthodes

Exercice classique

Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^3 - at - b)^2 \,\mathrm{d}t$.

Méthode pour résoudre cet exercice classique

1. Reconnaître l'EV E le produit scalaire et le SEV de dimension finie F correspondant à la situation.
2. Faire le lien entre la question et $d(x, F)$ où $x \in E$ et calculer la distance $d(x, F)$ grâce au projeté orthogonal.

Méthode pour calculer la projection orthogonale

Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E un préhilbertien et $x \in E$.

1. Si on connaît la décomposition $x = f + g$ où $f \in F$ et $g \in F^{\perp}$, alors $f = p_F(x)$.
2. Si $(g_1, g_2, \ldots, g_r)$ est une base orthonormée de F, alors $p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle x, g_k \rangle g_k$.
3. Si $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ est une base quelconque de F. Alors, $p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k f_k$, avec $\langle x - p_F(x), f_i \rangle = 0$ pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$. On résout donc un système linéaire à r équations et r inconnues.
4. Si on connaît $p_{F^{\perp}}$ (par une des méthodes précédentes), alors $p_F = \mathrm{Id}_E - p_{F^{\perp}}$.