Correction de l'exercice 1. Aucun de ces exemples n'est un produit scalaire :

1. φ n'est pas positive : en effet si $p = (1, 3, 1)$, alors $\varphi(p, p) = -4 < 0$.
2. φ n'est pas à valeurs dans $\mathbb{R}$.
3. φ n'est pas définie : $\varphi(X, X) = 0$ et $X \neq 0$.
4. φ n'est pas définie : si $f\colon x \mapsto 1$, $\varphi(f, f) = 0$.

Correction de l'exercice 2. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$. Par croissance comparée,

$$\frac{P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Ainsi, $P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n} = \mathcal{O}(n^{-2})$, la série $\sum P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}$ est convergente par comparaison à une série positive et convergente (série de Riemann de paramètre $2 > 1$). La fonction ϕ existe donc bien. On montre après qu'elle est bilinéaire (par linéarité de Σ), symétrique, positive. Enfin si $\varphi(P, P) = 0$, on en déduit que $\sum P(n)P(n)\mathrm{e}^{-n}$ est une série à terme positive et de somme nulle, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^2(n)\mathrm{e}^{-n} = 0$. Comme exponentielle ne s'annule pas $P(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc P a une infinité de racines. Donc $P = 0$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, alors :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)Q(n)\mathrm{e}^{-n}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)^2\mathrm{e}^{-n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} Q(n)^2\mathrm{e}^{-n}\right)$$

Correction de l'exercice 3.

1. À démontrer point par point
2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec (x, y, z) et $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)$. On obtient :

$$\begin{aligned} \phi\left((x,y,z), \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)\right)^2 &\leqslant \|(x,y,z)\|^2 \left\|\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}\right)\right\|^2 \\ (x+y+z)^2 &\leqslant \|(x,y,z)\|^2 \frac{11}{6} \leqslant \frac{11}{6} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4. Soit $x > 0$. Utilisons le produit scalaire usuel sur $\mathscr{C}([0\,;x], \mathbb{R})$: $\langle f, g\rangle = \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $f \in \mathscr{C}^1$ et $f(0) = 0$, pour tout $x > 0$, $f(x) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \langle f', 1\rangle$. Soit $x > 0$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$f(x) = \langle f', 1\rangle \leqslant \|f'\| \times \|1\| = \sqrt{\int_0^x f'(t)^2\,\mathrm{d}t} \times \sqrt{x}$$

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

1. Soit $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$
   - Remarquons que $X^\top Y$ est une matrice de taille $(1, 1)$ (donc un réel) donc symétrique, ainsi $(X^\top Y)^\top = X^\top Y$, soit $Y^\top X = X^\top Y$. Ceci prouve que le produit scalaire est symétrique.
   - Considérons $X' \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par linéarité de la transposée et par distributivité du produit matriciel $(\lambda X + X')^\top Y = (\lambda X^\top + X'^\top)Y = \lambda X^\top Y + X'^\top$. Ceci prouve la linéarité à gauche (et donc à droite par symétrie).
   - $X^\top X = \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \geqslant 0$. Ceci prouve la positivité.
   - Supposons que $X^\top X = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 = 0$, on a une somme de réels positifs qui est nulle, donc pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, ${X_i}^2 = 0$ soit $X = 0$. Ceci prouve le caractère défini

   Ainsi, $(X, Y) \mapsto X^\top Y$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $AX = 0$, donc $A^\top(AX) = A^\top 0 = 0$, donc $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$. Dès lors $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^\top A)$. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A^\top A)$, donc $A^\top AX = 0$, donc $X^\top A^\top AX = 0$, soit $(AX)^\top(AX) = 0$, donc $\langle AX, AX\rangle = 0$, comme le produit scalaire est définie, $AX = 0$ donc $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(A^\top A) \subset \mathrm{Ker}(A)$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$.

3. Soit $Y \in \mathrm{Im}(A^\top A)$, alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Y = A^\top AX$, en particulier $Y = A^\top(AX) \in \mathrm{Im}(A^\top)$. Ceci prouve que $\mathrm{Im}(A^\top A) \subset \mathrm{Im}(A^\top)$. De plus, en appliquant le théorème du rang matriciel [1] :

$$\dim(\mathrm{Im}(A^\top)) = \dim(\mathrm{Im}(A)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A^\top A)) = \dim(\mathrm{Im}(A^\top A))$$

Ainsi, les deux images ont même dimension et l'une est inclus dans l'autre, donc $\mathrm{Im}(A^\top A) = \mathrm{Im}(A^\top)$

Correction de l'exercice 7. Soit $g \in H^\perp$: $\forall f \in H$, $\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Or, $t \mapsto tg(t) \in H$ donc $\displaystyle\int_0^1 tg^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$. La fonction $t \mapsto tg^2(t)$ est une fonction positive et continue sur $[\,0\,;1\,]$ donc c'est la fonction nulle. Ainsi pour tout $t \in \,]\,0\,;1\,]$, $g(t) = 0$. Par continuité en 0, $g(0) = 0$ donc $g = 0$. Ainsi, $H^\perp \subset \{0\}$. Comme $0 \in H^\perp$. On $H^\perp = \{0\}$. On a donc $(H^\perp)^\perp = E \neq H$.

Correction de l'exercice 8. On rappelle que $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^\top)$ est le produit scalaire usuel sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Redémontrons rapidement que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

- $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$) est est un SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car est le noyau de l'application linéaire $M \mapsto M - M^\top$ (resp. $M \mapsto M + M^\top$).
- Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, alors $M^\top = M = -M$. Donc $2M = 0_n$, d'où $M = 0_n$, ainsi $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
- Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $S = \dfrac{1}{2}(M + M^\top)$, $A = \dfrac{1}{2}(M - M^\top)$, alors on vérifie que $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et que $S + A = M$, ainsi $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont bien des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$, alors

$$\langle S, A\rangle = \mathrm{tr}(SA^\top) = \mathrm{tr}(S(-A)) = -\mathrm{tr}(SA)$$

De plus, par symétrie du produit scalaire :

$$\langle S, A\rangle = \langle A, S\rangle = \mathrm{tr}(AS^\top) = \mathrm{tr}(AS) = \mathrm{tr}(SA) = -\langle S, A\rangle$$

Ainsi, $\langle S, A\rangle = 0$. Donc $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels orthogonaux. Ainsi, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des supplémentaires orthogonaux. Ainsi, pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \dfrac{1}{2}\left(M + M^\top\right) + \dfrac{1}{2}\left(M - M^\top\right)$ avec $\dfrac{1}{2}\left(M + M^\top\right) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\dfrac{1}{2}\left(M - M^\top\right) \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp$ donc en notant p la projection orthogonale sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $p\colon M \mapsto \dfrac{1}{2}\left(M + M^\top\right)$.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10. 1. Soient $(f, g, h) \in E^3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (g(t)f(t) + g'(t)f'(t))\,\mathrm{d}t = \varphi(g, f)$. Ainsi, φ est symétrique.
- Par linéarité de la dérivation et de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda f + h, g) &= \int_0^1 (\lambda f + h)(t)g(t) + (\lambda f + h)'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \lambda f(t)g(t) + h(t)g(t) + \lambda f'(t)g'(t) + h'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\int_0^1 f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 h(t)g(t) + h'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\varphi(f, g) + \varphi(h, g)
\end{aligned}$$

  Ainsi, φ est linéaire à gauche, par symétrie, elle est linéaire à droite, φ est finalement une forme bilinéaire.
- $\varphi(f, f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)^2 + f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ (par positivité de l'intégrale). Ainsi, φ est positive.

---

1. Rappel si A est une matrice, alors $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A)) =$ le nombre de colonnes de A.

- Supposons $\varphi(f,f)=0$. Or $t\mapsto f(t)^2+f'(t)^2$ est une fonction continue, positive et d'intégrale nulle, d'après le théorème de nullité de l'intégrale, pour tout $t\in[0;1]$, $f(t)^2+f'(t)^2=0$. Or $f(t)^2\geqslant 0$ et $f'(t)\geqslant 0$, on en déduit que $f(t)=0$ pour tout $t\in[0;1]$. Ainsi, f est la fonction nulle. Ainsi, φ est définie.

Nous avons donc montré que φ est un produit scalaire sur E.

2. En posant $\phi\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ f \longmapsto (f(0),f'(0)) \end{cases}$ et $\psi\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f''-f \end{cases}$, ϕ et ψ sont des applications linéaires définies sur E et donc $V=\mathrm{Ker}(\phi)$ et $W=\mathrm{Ker}(\psi)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Montrons que V et W sont orthogonaux. Soit $v\in V$ et $w\in W$, alors :

$$\varphi(v,w)=\int_0^1 v(t)w(t)+v'(t)w'(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 v(t)w''(t)+v'(t)w'(t)\mathrm{d}t=\left[v(t)w'(t)\right]_0^1=v(1)w'(1)-v(0)w'(0)=0$$

Dès lors, V et W sont orthogonaux.

Montrons que V et W sont supplémentaires. Soit $f\in E$. Montrons, par analyse-synthèse, qu'il existe un unique $(v,w)\in V\times W$ tel que $f=v+w$.

- **Analyse :** supposons qu'il existe $v\in V$ et $w\in W$ tel que $f=v+w$, alors $w''=w$, d'où $w''-w=0$. On reconnait alors une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et homogène. Ainsi, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que $w\colon t\mapsto A\mathrm{e}^t+B\mathrm{e}^{-t}$. Dès lors, pour tout $t\in[0;1]$, $f(t)=v(t)+A\mathrm{e}^t+B\mathrm{e}^{-t}$. En particulier, $f(0)=v(0)+A+B=A+B$ et $f(1)=v(1)+A\mathrm{e}^1+B\mathrm{e}^{-1}$. Comme $v\in V$, $v(0)=v(1)=0$. Ainsi, on obtient le système suivant [2], que l'on résout :

$$\begin{cases} A+B &= f(0) \\ A\mathrm{e}^1+B\mathrm{e}^{-1} &= f(1) \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-\mathrm{e}^{-1}L_1}{\iff} \begin{cases} B &= f(0)-A \\ A(\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}) &= f(1)-\mathrm{e}^{-1}f(0) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A &= \dfrac{f(1)-\mathrm{e}^{-1}f(0)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}} \\ B &= f(0)-\dfrac{f(1)-\mathrm{e}^{-1}f(0)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}=\dfrac{f(0)\mathrm{e}^1-f(1)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}} \end{cases}$$

Ainsi, on a montré que si $f=v+w$ avec $v\in V$ et $w\in W$, alors $w\colon t\mapsto \dfrac{f(1)-\mathrm{e}^{-1}f(0)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\mathrm{e}^t+\dfrac{f(0)\mathrm{e}^1-f(1)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\mathrm{e}^{-t}$ et $v=f-w$.

- **Synthèse :** posons $w\colon t\mapsto \dfrac{f(1)-\mathrm{e}^{-1}f(0)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\mathrm{e}^t+\dfrac{f(0)\mathrm{e}^1-f(1)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\mathrm{e}^{-t}$ et $v=f-w$. Alors, $v+w=f$, par dérivation de l'exponentielle, $w''=w$, donc $w\in W$. De plus,

$$\begin{aligned} v(0) &= f(0)-w(0)=f(0)-\frac{f(1)-\mathrm{e}^{-1}f(0)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}-\frac{f(0)\mathrm{e}^1-f(1)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}=0 \\ v(1) &= f(1)-w(1)=f(1)-\frac{f(1)-\mathrm{e}^{-1}f(0)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\mathrm{e}^1-\frac{f(0)\mathrm{e}^1-f(1)}{\mathrm{e}^1-\mathrm{e}^{-1}}\mathrm{e}^{-1}=0 \end{aligned}$$

  Ainsi, $v\in V$. Par conséquent, on a montré qu'il existait $v\in V$ et $w\in W$ tel que $f=v+w$.

La synthèse a montré l'existence de $v\in V$ et de $w\in W$ tel que $f=v+w$. L'analyse a montré qu'ils étaient uniques. Ainsi, V et W sont supplémentaires, comme ils sont orthogonaux, on en conclut qu'ils sont supplémentaires orthogonaux.

Correction de l'exercice 11.

2. Les calculs auraient pu être beaucoup plus simples et plus élégants si on résolvait l'équation différentielle avec ch et sh à la place de $t\mapsto\mathrm{e}^t$ et $t\mapsto\mathrm{e}^{-t}$, il aurait fallu écrire, pour tout $t\in[0;1]$, $w(t)=A\mathrm{ch}(t)+B\mathrm{sh}(t)$. Le système aurait $\begin{cases} A\mathrm{ch}(0)+B\mathrm{sh}(0) &= f(0) \\ A\mathrm{ch}(1)+B\mathrm{sh}(1) &= f(1) \end{cases}$ ssi $\begin{cases} A &= f(0) \\ B &= \dfrac{f(1)-f(0)\mathrm{ch}(1)}{\mathrm{sh}(1)} \end{cases}$.

Correction de l'exercice 12. 1. Fixons $j \in [\![1 ; n]\!]$. Alors en utilisant l'équation avec $x = e_j$, on obtient

$$\|e_j\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_j, e_k \rangle^2 = \langle e_j, e_j \rangle + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \langle e_j, e_k \rangle^2$$

Comme $\|e_j\|^2 = \langle e_j, e_j \rangle = 1$, on obtient, en retranchant, 1 des deux côtés de l'équation

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \langle e_j, e_k \rangle^2 = 0$$

Or, si une somme de réels positifs est nul c'est que tous les termes sont nuls, ainsi, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, si $k \neq j$, on obtient $\langle e_j, e_k \rangle = 0$ et si $k = j$, $\langle e_j, e_j \rangle = 1$. Et ce, pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, la famille $\mathscr{B}$ est donc orthonormale. Ainsi, $\mathscr{B}$ est une famille libre et $\|\mathscr{B}\| = n = \dim(E)$ donc $\mathscr{B}$ est une base E. On peut donc en conclure que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.

2. Ne supposons plus que E est de dimension n. Posons $F = \text{vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, alors par ce qui précède, appliqué à F, $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de F. Soit $x \in F^\perp$. Alors, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $\langle x, e_k \rangle = 0$, ainsi $\|x\|^2 = 0$ donc $x = 0_E$. Ceci montre que $F^\perp = \{0_E\}$, en repassant à l'orthogonal, on obtient que $(F^\perp)^\perp = \{0_E\}^\perp$. Or comme E est un espace euclidien, $(F^\perp)^\perp = F$. En outre, $\{0_E\}^\perp = E$. Dès lors, $E = F$ et $\mathscr{B}$ est une base orthonormée de F donc de E.

Remarque 1. On sait déjà, d'après le cours, que si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E, alors $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$. Ici, on a étudié une réciproque partielle (dans le cas où les vecteurs étaient unitaires).

Correction de l'exercice 13. La base canonique de[3] $\mathbb{R}_3[X]$ est $(1, X, X^2, X^3)$.

1. $\|1\| = \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} 1 \, \mathrm{d}t} = \sqrt{2}$, on pose donc $P_1 = \dfrac{1}{\|1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. On pose $U = X - \langle X, P_1 \rangle P_1$, avec $\langle X, P_1 \rangle = \int_{-1}^{1} t \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}t = 0$, ainsi $U = X$, de plus $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \sqrt{\int_{-1}^{1} t^2 \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, ainsi on pose $P_2 = \dfrac{U}{\|U\|} = \sqrt{\dfrac{3}{2}} X$.

3. On pose $U = X^2 - \left\langle X^2, P_1 \right\rangle P_1 - \left\langle X^2, P_2 \right\rangle P_2$. Or,

$$\left\langle X^2, P_2 \right\rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} t^3 \, \mathrm{d}t = 0 \qquad \text{et} \qquad \left\langle X^2, P_1 \right\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{2}} t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3}$$

Ainsi, $U = X^2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{2}{3} P_1$, donc $X^2 = U + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{2}{3} P_1$ avec $U \perp \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{2}{3} P_1$, ainsi d'après le théorème de Pythagore : $\|X^2\|^2 = \|U\|^2 + \left\| \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{2}{3} P_1 \right\|^2$, soit

$$\|U\|^2 = \int_{-1}^{1} t^4 \, \mathrm{d}t - \frac{2}{9} \|P_1\|^2 = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

Donc $\|U\| = \dfrac{2}{3} \sqrt{\dfrac{2}{5}}$. Posons $P_3 = \dfrac{U}{\|U\|} = \dfrac{3}{2} \sqrt{\dfrac{5}{2}} \left(X^2 - \dfrac{1}{3} \right)$.

3. Dans ce qui suit, on pourrait alléger les calculs en remarquant, une bonne fois pour toutes, que $\left\langle X^i, X^j \right\rangle = 0$ si $i + j$ est impair et $\left\langle X^i, X^j \right\rangle = \dfrac{2}{i + j + 1}$ si $i + j$ est pair.

4. Posons $U = X^3 - \left\langle X^3, P_1\right\rangle P_1 - \left\langle X^3, P_2\right\rangle P_2 - \left\langle X^3, P_3\right\rangle P_3$. Or,

$$\left\langle X^3, P_1\right\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{d}t = 0 \quad \left\langle X^3, P_2\right\rangle = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}} t^4 \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{5}, \quad \text{et} \quad \left\langle X^3, P_3\right\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}} t^3 \left(t^2 - \frac{1}{3}\right) \mathrm{d}t = 0$$

Ainsi, $U = X^3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{5} P_2$, donc $X^3 = U + \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{5} P_2$ avec $U \perp \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{5} P_2$, ainsi d'après le théorème de Pythagore : $\|X^3\|^2 = \|U\|^2 + \left\|\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{2}{5} P_2\right\|^2$, soit :

$$\|U\|^2 = \int_{-1}^{1} t^6 \,\mathrm{d}t - \frac{3}{2} \times \frac{4}{25}\|P_2\|^2 = \frac{2}{7} - \frac{6}{25} = \frac{50-42}{7 \times 25} = \frac{8}{7 \times 25}$$

Ainsi, $\|U\| = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{7}}$. On pose alors $P_4 = \frac{U}{\|U\|} = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(X^3 - \frac{3}{5}X\right)$.

En conclusion, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}X, \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right), \frac{5}{2}\sqrt{\frac{7}{2}}\left(X^3 - \frac{3}{5}X\right)\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16. On pose $V = \mathrm{vect}(I_n, J)$, V est un espace vectoriel dont (I_n, J) est une famille génératrice. De plus, (I_n, J) est une famille libre (car $n \geqslant 2$). Cherchons une base orthonormée de V grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt :

1. $\|I_n\| = \sqrt{\langle I_n, I_n\rangle} = \sqrt{\mathrm{tr}(I_n \times {I_n}^\top)} = \sqrt{\mathrm{tr}(I_n)} = \sqrt{n}$. On pose alors $M_1 = \frac{I_n}{\|I_n\|} = \frac{1}{\sqrt{n}} I_n$.
2. On pose $U = J - \langle J, M_1\rangle M_1$, or $\langle J, M_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\langle J, I_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{tr}(J{I_n}^\top) = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{tr}(J) = \sqrt{n}$. Ainsi, $U = J - \sqrt{n}M_1$, donc $J = U + \sqrt{n}M_1$ avec $U \perp \sqrt{n}M_1$, ainsi par Pythagore, $\|J\|^2 = \|U\|^2 + \|\sqrt{n}M_1\|^2$, donc

$$\|U\|^2 = \mathrm{tr}(JJ^\top) - n\|M_1\|^2 = \mathrm{tr}(nJ) - n = n\mathrm{tr}(J) - n = n^2 - n = n(n-1)$$

Ainsi, $\|U\| = \sqrt{n(n-1)}$, dès lors posons, $M_2 = \frac{1}{\|U\|}U = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}(J - I_n)$.

Par conséquent, $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}I_n, \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}(J - I_n)\right)$ est une base orthonormée de V. Puis, en notant p la projection orthogonale sur V

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|M - aI_n - bJ\| = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|M - (aI_n + bJ)\| = \inf_{N\in V}\|M - N\| = \|M - p(M)\| = \|M - \langle M, M_1\rangle M_1 - \langle M, M_2\rangle M_2\|$$

Or :

$$M = \underbrace{M - \langle M, M_1\rangle M_1 - \langle M, M_2\rangle M_2}_{\in V^\perp} + \underbrace{\langle M, M_1\rangle M_1}_{\in V} + \underbrace{\langle M, M_2\rangle M_2}_{\in V}$$

Ainsi $M - \langle M, M_1\rangle M_1 - \langle M, M_2\rangle M_2 \perp \langle M, M_1\rangle M_1$ et $M - \langle M, M_1\rangle M_1 - \langle M, M_2\rangle M_2 \perp \langle M, M_2\rangle M_2$. De plus, comme (M_1, M_2) est une base orthonormale de V, $\langle M, M_1\rangle M_1 \perp \langle M, M_2\rangle M_2$. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$\|M\|^2 = \|M - \langle M, M_1\rangle M_1 - \langle M, M_2\rangle M_2\|^2 + \|\langle M, M_1\rangle M_1\|^2 + \|\langle M, M_2\rangle M_2\|^2$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\|M - \langle M, M_1\rangle M_1 - \langle M, M_2\rangle M_2\|^2 &= \mathrm{tr}(MM^\top) - \langle M, M_1\rangle^2\|M_1\|^2 - \langle M, M_2\rangle^2\|M_2\|^2 \\
&= \mathrm{tr}(MM^\top) - \frac{1}{n}\mathrm{tr}(M{I_n}^\top)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\mathrm{tr}(M(J - I_n)^\top)^2
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\|M-aI_n-bJ\| = \sqrt{\operatorname{tr}(MM^\top)-\frac{1}{n}\operatorname{tr}(M)^2-\frac{1}{n(n-1)}\operatorname{tr}(M(J-I_n))^2}$$

Correction de l'exercice 17. 1. On vérifie facilement que φ est une forme bilinéraire, symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Soit $f\in E$ tel que $\varphi(f,f)=0$. Alors f^2 est continue et positive sur $[0;2\pi]$ et d'intégrale nulle. Donc pour tout $x\in[0;2\pi]$, $f^2(x)=0$. Donc f est nulle sur $[0;2\pi]$, par 2π-périodicité, f est nulle sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $(p,m)\in(\mathbb{N}^*)^2$ avec $n\neq m$ et $m\neq p$, il faut donc montrer que

$$\int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{d}\theta=0 \quad \int_0^{2\pi}\sin(m\theta)\sin(p\theta)\mathrm{d}\theta=0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi}\cos(n\theta)\sin(p\theta)\mathrm{d}\theta=0$$

Pour cela, on peut par exemple remplacer cos et sin par les formules d'Euler (faire attention aux divisions par 0.

3. Quitte à diviser par les normes (qui sont non nulles), $\mathscr{B}=\left(\frac{c_0}{\|c_0\|},\frac{c_1}{\|c_1\|},\dots,\frac{c_n}{\|c_n\|},\frac{s_1}{\|s_1\|},\dots,\frac{s_n}{\|s_n\|}\right)$ est une base orthonormale de V_n. Ainsi, on peut calculer la projection de f sur V_n grâce à la formule de projection

$$p_n(f)=\sum_{i=0}^n\left\langle f,\frac{c_i}{\|c_i\|}\right\rangle\frac{c_i}{\|c_i\|}+\sum_{i=1}^n\left\langle f,\frac{s_i}{\|s_i\|}\right\rangle\frac{s_i}{\|s_i\|}=\sum_{i=0}^n\langle f,c_i\rangle\frac{c_i}{\|c_i\|^2}+\sum_{i=1}^n\langle f,s_i\rangle\frac{s_i}{\|s_i\|^2}$$

Il reste donc à calculer $\|s_i\|^2$ et $\|c_i\|^2$ (encore une fois passer par les formules d'Euler).

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21. 1. Si $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est une famille orthonormale de E, alors $\langle x_i,x_j\rangle=\delta_{i,j}$, ainsi $G(x_1,x_2,\dots,x_n)=\det(I_n)=1$.

2. Supposons que $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ soit liée, il existe $k\in[\![1;n]\!]$ tel que $x_k\in\operatorname{vect}(x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n)$. Ainsi, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $x_k=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n\lambda_jx_j$ Soit $i\in[\![1;n]\!]$. Alors, par linéarité à droite du produit scalaire,

$$\langle x_i,x_k\rangle=\left\langle x_i,\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n\lambda_jx_j\right\rangle=\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n\lambda_k\langle x_i,x_j\rangle$$

Ainsi, en notant C_j la j-ième ligne de la matrice $(\langle x_i,x_j\rangle)_{i,j})$, on a montré que $C_k=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^n\lambda_jC_j$. Ainsi, $\operatorname{rg}(\langle x_i,x_j\rangle)_{i,j})<n$, la matrice $(\langle x_i,x_j\rangle)_{i,j}$ n'est donc pas inversible. Son déterminant est alors nul, en conclusion, $G(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$.

3. Supposons $G(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$. Alors, la matrice $(\langle x_i,x_j\rangle)_{i,j}$ n'est pas inversible, alors son rang est strictement plus petit que n, ainsi l'une des colonnes est combinaison linéaire des autres :

$$\exists k\in[\![1;n]\!]\qquad C_k\in\operatorname{vect}(C_1,C_2,\dots,C_{k-1},C_{k+1},\dots,C_n)$$

Il existe alors $(\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1},\lambda_{k+1},\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$ tel que $C_k=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\lambda_jC_j$, ainsi, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$, $\langle x_i,x_k\rangle=\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\lambda_j\langle x_i,x_j\rangle$. Par linéarité du produit scalaire à droite, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$,

$$\left\langle x_i, x_k-\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\lambda_jx_j\right\rangle=0$$

Posons $x=x_k-\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\lambda_jx_j$. Ainsi, $x\in\mathrm{vect}\,(x_1,x_2,\dots,x_n)$ et comme, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$, $x\perp x_i$, $x\in\mathrm{vect}\,(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\perp}$. Ainsi, $x\in\mathrm{vect}\,(x_1,x_2,\dots,x_n)\bigcap\mathrm{vect}\,(x_1,x_2,\dots,x_n)^{\perp}=\{0_E\}$. Ceci montre que

$$x_k=\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}\lambda_jx_j\in\mathrm{vect}(x_1,x_2,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_n)$$

Par conséquent, la famille $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ est liée.

4. Soit $i\in[\![1\,;n]\!]$, par linéarité du produit scalaire,

$$\langle x,e_i\rangle=\langle p(x)+(x-p(x)),e_i\rangle=\langle p(x),e_i\rangle+\langle x-p(x),e_i\rangle$$

Or $x-p(x)\in F^{\perp}$, donc $\langle x-p(x),e_i\rangle=0$. Ainsi, $\langle x,e_i\rangle=\langle p(x),e_i\rangle$.
De plus, comme $p(x)\in F$ et $x-p(x)\in F^{\perp}$, $p(x)\perp(x-p(x))$. D'après le théorème de Pythagore,

$$\|p(x)\|^2+\|x-p(x)\|^2=\|p(x)+(x-p(x))\|^2=\|x\|^2$$

5. Détaillons $G(e_1,\dots,e_n,x)$ en utilisant le fait $\langle e_i,x\rangle=\langle e_i,p(x)\rangle$ et $\langle x,x\rangle=\|x\|^2=\|p(x)\|^2+\|x-p(x)\|^2$, il en découle que

$$G(e_1,\dots,e_n,x)=\begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \dots & \langle e_1,e_n\rangle & \langle e_1,p(x)\rangle+0\\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle & \dots & \langle e_2,e_n\rangle & \langle e_2,p(x)\rangle+0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \langle e_n,e_1\rangle & \langle e_n,e_2\rangle & \dots & \langle e_n,e_n\rangle & \langle e_n,p(x)\rangle+0\\ \langle p(x),e_1\rangle & \langle p(x),e_2\rangle & \dots & \langle p(x),e_n\rangle & \langle p(x),p(x)\rangle+\|x-p(x)\|^2\end{vmatrix}$$

En utilisant la linéarité du déterminant par rapport à la $n+1$-ième colonne, il vient :

$$\begin{aligned}G(e_1,\dots,e_n,x)&=\begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \dots & \langle e_1,e_n\rangle & \langle e_1,p(x)\rangle\\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle & \dots & \langle e_2,e_n\rangle & \langle e_2,p(x)\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \langle e_n,e_1\rangle & \langle e_n,e_2\rangle & \dots & \langle e_n,e_n\rangle & \langle e_n,p(x)\rangle\\ \langle p(x),e_1\rangle & \langle p(x),e_2\rangle & \dots & \langle p(x),e_n\rangle & \langle p(x),p(x)\rangle\end{vmatrix}\\ &+\begin{vmatrix}\langle e_1,e_1\rangle & \langle e_1,e_2\rangle & \dots & \langle e_1,e_n\rangle & 0\\ \langle e_2,e_1\rangle & \langle e_2,e_2\rangle & \dots & \langle e_2,e_n\rangle & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \langle e_n,e_1\rangle & \langle e_n,e_2\rangle & \dots & \langle e_n,e_n\rangle & 0\\ \langle p(x),e_1\rangle & \langle p(x),e_2\rangle & \dots & \langle p(x),e_n\rangle & \|x-p(x)\|^2\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Dans le premier déterminant, on reconnaît $G(e_1,\dots,e_n,p(x))$, dans le deuxième déterminant, on peut développer par rapport à la $n+1$-ième colonne, ainsi,

$$G(e_1,\dots,e_n,x)=G(e_1,\dots,e_n,p(x))+\|x-p(x)\|^2G(e_1,\dots,e_n)$$

Or, $p(x)\in F=\mathrm{vect}(e_1,\dots,e_n)$, donc $(e_1,\dots,e_n,p(x))$ est liée, d'après la question 2, $G(e_1,\dots,e_n,p(x))=0$. De plus, $\|x-p(x)\|=d(x,F)$. Ainsi, $G(e_1,\dots,e_n,x)=d^2(x,F)G\,(e_1,e_2,\dots,e_n)$.

6. Il s'agit de calculer la distance au carré entre $f\colon t \mapsto t^5$ et $F = \text{vect}(e_1, e_2)$ avec $e_1\colon t \mapsto 1$ et $e_2\colon t \mapsto t$, La famille (e_1, e_2) est une famille génératrice de F. En outre,

$$G(e_1, e_2) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3} \neq 0$$

Ainsi, par la contraposée de la question 2, la famille (e_1, e_2) est libre, donc est une base de F. alors en appliquant ce qui précède, $G(e_1, e_2, f) = d^2(f, F)G(e_1, e_2)$. De plus,

$$G(e_1, e_2, f) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{2}{11} \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{2}{11} \end{vmatrix} = 8(\frac{1}{33} - \frac{1}{49}) = \frac{8 \times 16}{49 \times 33}$$

Ainsi,

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^{1} (t^5 - (at + b))^2 \, \mathrm{d}t = d^2(f, F) = \frac{G(e_1, e_2, f)}{G(e_1, e_2)} = \frac{2 \times 16}{49 \times 11} = \frac{32}{439}$$