Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1 ($\star$)**.** Démontrer que $]0;1[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2 ($\star\star$)**.**

1. Montrer qu'une union quelconque d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer qu'une intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. On pose, $O_n = B(0_{\mathbb{R}^2}, 1/n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, est-ce que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} O_n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$?

Soit F une partie de $\mathbb{R}^2$, on dit que F est fermé si $\mathbb{R}^2 \backslash F$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer que $\mathbb{R}^2$ et $\varnothing$ sont des fermés de $\mathbb{R}^2$ (ils sont aussi ouverts).
5. Montrer qu'une boule fermée de $\mathbb{R}^2$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 (𝄞$\star\star$ ©)**.** Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset F$. Démontrer que $F = \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 ($\star\star$)**.** Soient $a \in \mathbb{R}^2$, $a' \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ et $r' > 0$.

1. Déterminer une CNS tel que $B(a,r) \subset B(a',r')$.
2. Démontrer qu'une boule ouverte a un unique centre et un unique rayon.

Exercice 5 ($\star$)**.** On pose $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^6}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Étudier la continuité de f en $(0,0)$.

Exercice 6 ($\star\star$)**.** Étudier la continuité de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{e^x - e^y}{x-y}$ si $x \neq y$ et $f(x,x) = e^x$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Étudier la dérivabilité de $\varphi\colon t \mapsto f(e^t, t^3)$ et dériver cette fonction.

Exercice 8 ($\star$)**.** Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t,t^2) = 42$. Déterminer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Exercice 9 ($\star$)**.** Déterminer le gradient de $f\colon (x,y) \mapsto xye^{x^2}$.

Exercice 10 (𝄞$\star\star$)**.** Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose que pour tout $(x,y,t) \in \mathbb{R}^3$, $f(tx,ty) = tf(x,y)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 11 ($\star$)**.** Soit $f\colon x \mapsto \|x\|$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ puis déterminer son gradient.
2. Montrer que f n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12 (𝄞$\star\star$)**.** Soit $c > 0$. Le but est de chercher toutes les fonctions $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

1. Démontrer que les fonctions $(x,t) \mapsto g(x+ct)$ avec $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont solutions du problème.
2. Soit f une solution de ce problème. À l'aide du changement de variable $u = x+ct$ et $v = x-ct$, déterminer une expression de f.

Cet exercice peut-être généralisé avec la résolution de l'équation de d'Alembert $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ qui modélise les ondes.

Exercice 13 ($\star\star\star$)**.** Soit un triangle ABC du plan $\mathbb{R}^2$. Démontrer que $M \mapsto AM^2 + BM^2 + CM^2$ admet un minimum en un unique point à déterminer.
On pourra utiliser le fait que si $f\colon B_f(0,r) \to \mathbb{R}$ est continue, alors la fonction f est bornée et ses bornes sont atteintes.