DS1

21 septembre 2024

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Connaître son cours implique réussir aux concours

1. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$. Nier la proposition suivante avec des quantificateurs :
$$\forall x \in I \quad \forall x' \in I \qquad \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)$$
2. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Recopiez et complétez la définition suivante : «on dit que f est dérivable en a si ... Et dans ce cas, on note $f'(a) = ...$».
3. Soit $f\colon I \to J$ une fonction, définir avec des quantificateurs, f est bijective.
4. Si $f\colon I \to J$ est bijective, donner la définition de f^{-1} (avec son ensemble de départ et d'arrivée).
5. Soit $f\colon I \to J$ une fonction, définir l'image de f, notée, $f(I)$.
6. Soit $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction, donner la définition de f est croissante avec des quantificateurs.
7. Nier la proposition précédente avec des quantificateurs, (ce qui définit $f\colon I \to \mathbb{R}$ non croissante).

Une équation radicale

Résoudre $\sqrt{x-5} + \sqrt{x} = 5$ (ne pas oublier de déterminer d'abord le domaine de validité de cette équation).

Des inéquations à faire éclater vos sinus

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin(x) \geqslant 0$
2. $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

Comme au cinéma, serait-ce la suite de trop ?

On pose $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + (n+1)(n+2)$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

Un exercice monotone

On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$, ainsi, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 1$.
2. Déterminer le sens de variation de f en matière de stricte monotonie.
3. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à déterminer.
5. Donner l'équation de la tangente de f en 0.
6. Tracer proprement la courbe de f ainsi que sa tangente en 0, on prendra une échelle de 2cm par unité.
7. Résoudre l'équation $f(x) = \dfrac{3}{4}$.
8. Déterminer l'expression de la bijection réciproque de f.

On rappelle que arcsin est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que $\arcsin'\colon x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9. Démontrer que $x \mapsto \arcsin(f(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer sa dérivée.
10. On fixe $u_0 \in \mathbb{R}$ quelconque et on définit la suite $(u_n)_n$ par pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Est-ce que $(u_n)_n$ converge ?

Des fonctions fonction d'un scalaire

Soit $\lambda > 0$. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_λ par $f_\lambda \colon x \mapsto x + \lambda(x+1)\mathrm{e}^{-x}$

1. Justifier rapidement que f_λ est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_\lambda{}'$.
2. Justifier rapidement que $f_\lambda{}'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer sa dérivée notée $f_\lambda{}''$.
3. Donner les variations de $f_\lambda{}'$ en matière de stricte monotonie.
4. Déterminer l'image de $f_\lambda{}'$ sur chacun des intervalles trouvés à la question précédente.
5. Déterminer, suivant la valeur de λ, le nombre de solutions de l'équation $f_\lambda{}'(x) = 0$.
6. Déterminer les variations de f_λ en fonction de λ en matière de stricte monotonie.
7. Dans le cas où $\lambda < e$, montrer que f_λ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble à déterminer.
8. Toujours si $\lambda < e$, montrer que $f_\lambda{}^{-1}$ (bijection réciproque de f_λ) est dérivable en λ et déterminer sa dérivée en λ.

On reprend λ quelconque.

9. Écrire une fonction Python nommée `f` qui, pour deux paramètres a et x, renvoie la valeur de $f_a(x)$. On pourra utiliser la commande `np.exp(x)` qui renvoie la valeur de e^x (à la condition que la ligne `import numpy as np` ait été écrite en début du programme).
10. La fonction f_λ est-elle paire ? impaire ?
11. Démontrer que toutes les courbes des f_λ (avec $\lambda > 0$) se coupent en un unique point à déterminer.
12. Démontrer que toutes les tangentes des f_λ (avec $\lambda > 0$) au point d'abscisse 1 sont concourantes en un point à déterminer.

Soyez aussi fonctionnel que cette équation !

Déterminer toutes les fonctions $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall x' \in \mathbb{R} \qquad f(x - f(x')) = 2 - x - x'$$

Ne vous décomposez pas mais décomposez un !

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe a_1, a_2, ..., a_n des entiers naturels non nuls, deux à deux distincts tels que

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n}$$