DS2

12 octobre 2024

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer quel exercice vous traiter.

L'intégrale en sept volumes

1. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{\ln^{2024}(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2+7x+12}$
3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+7x+12}$
4. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-10x+25}$
   On précisera le ou les intervalles possibles
5. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{2x+3\mathrm{i}}$
6. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{2-\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$, on pourra poser $u=\sin(t)$.
7. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\ln(1+\cos(x))\,\mathrm{d}x$.

Ne soyez pas bornés sur vos complexes !

1. Exprimer sous forme algébrique $z=\dfrac{2+3\mathrm{i}}{7-2\mathrm{i}}$.
2. Écrire sous forme trigonométrique $-10\sqrt{3}+10\mathrm{i}$.
3. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Rappeler l'expression des racines n-ièmes de l'unité.
4. Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $8-6\mathrm{i}$.
5. Résoudre $z^2+(1-3\mathrm{i})z-4=0$.
6. Résoudre $z^8+(1-3\mathrm{i})z^4-4=0$.

Soit $f\colon I\to\mathbb{C}$, on dit que f est bornée sur I si

$$\exists M\in\mathbb{R}\quad \forall x\in I\qquad |f(x)|\leqslant M$$

7. En niant la définition précédente, donner la définition de f non bornée sur I avec des quantificateurs.
8. Soient $f\colon I\to C$ et $g\colon I\to\mathbb{C}$ deux fonctions bornées, montrer que $f+g$ et fg sont bornées sur I.
9. Si f et g sont non bornées, est-ce que $f+g$ est non bornée ?

Fonctions usuelles

On considère dans cet exercice les fonctions f et g définies par :

$$f\colon x\mapsto \frac{1}{2}\arctan(\mathrm{sh}(x))\qquad \text{et}\qquad g\colon x\mapsto \arctan\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}\right)$$

L'objectif de ce problème est de montrer que $f=g$ de deux manières différentes.

1. Pour $x\in\mathbb{R}$, rappeler la définition de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$.
2. Sans donner de preuve, rappeler sur quel intervalle arctan est dérivable et rappeler l'expression de sa dérivée.
3. Démontrer que g est définie sur $\mathbb{R}$.
4. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.
5. Soit $x\in\mathbb{R}$, énoncer la relation entre $\mathrm{ch}^2(x)$ et $\mathrm{sh}^2(x)$ et démontrer-là.
6. Montrer que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et calculer f' et g'.
7. Grâce à la fonction $h=f-g$, en déduire le résultat voulu.

On va maintenant montrer que $f = g$ d'une seconde manière.

8. Rappeler le domaine de définition de tan, que l'on notera D dans la suite.
9. Montrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, $2f(x) \in D$ et calculer $\tan(2f(x))$.
10. Soit $f\colon I \to J$ une fonction, donner la définition de f bijective avec des quantificateurs.
11. Si $f\colon I \to J$ est bijective. Donner la définition de f^{-1} : on donnera son ensemble de départ, ensemble d'arrivée et l'image par f^{-1} de chaque élément de l'ensemble de départ.
12. Montrer que $k\colon x \mapsto \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{1+\mathrm{ch}(x)}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$.
13. Déterminer l'expression de la tangente de k en 0.
14. Trouver l'expression explicite de k^{-1} (la bijection réciproque de k).
15. Tracer les courbes représentative de k et k^{-1} ainsi que leurs éventuelles asymptotes et la tangente de k en 0.
    On utilisera un repère orthonormée de taille raisonnable et une couleur pour chaque fonction.
16. Rappeler les formules trigonométriques de duplication concernant $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.
17. En déduire que
$$\forall \theta \in \left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[\qquad \tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$
18. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $2g(x) \in D$ puis que $\tan(2g(x)) = \mathrm{sh}(x)$.
19. En déduire le résultat voulu.

On va maintenant appliquer ce résultat pour un calcul de tangente :

20. Simplifier $\mathrm{ch}(\frac{1}{2}\ln(3))$ et $\mathrm{sh}(\frac{1}{2}\ln(3))$.
21. En appliquant l'égalité $f = g$ pour la valeur $\frac{1}{2}\ln(3)$, la tangente de quel angle peut-on calculer ?
    On simplifiera le résultat.

Involution

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est une involution si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$.

1. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \pi - x$. Montrer que g est une involution.
2. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) = 1/x$ et $h(0) = 0$. Montrer que h est une involution.
3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une involution quelconque. Montrer que, pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$, si $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$.

Remarque : on dira plus tard que f est injective.

4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une involution croissante. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.
5. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une involution quelconque. Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque.
6. Donner un exemple de fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui une involution mais qui n'est ni de la forme $x \mapsto x$, ni $x \mapsto a - x$ (avec $a \in \mathbb{R}$) ni h.

Équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on cherche à déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x > 0$, $f(f(x)) = 3x - 2f(x)$. On considère f une telle fonction. On fixe $x > 0$ et on pose $u_0 = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. La suite $(u_n)_n$ est ainsi définie par récurrence.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} + 3u_n$.
2. Démontrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha(-3)^n + \beta$
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha \neq 0$, démontrer que $u_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$ ou que $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.

La définition d'une suite $(v_n)_n$ tendent vers $-\infty$ s'écrit :
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad n \geqslant n_0 \implies v_n \leqslant M$$

4. Toujours si $\alpha \neq 0$, à l'aide de la question précédente, en déduire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < 0$.
5. Déterminer alors la valeur de α et celle de β.
6. Conclure en déterminant les fonctions $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $x > 0$, $f(f(x)) = 3x - 2f(x)$.

Un exercice limite

Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n}\,\mathrm{d}x$