Chapitre 5
Ensembles et applications

Prérequis : le chapitre logique, surtout bien connaître les méthodes pour montrer l'existence, l'unicité, les implications ainsi que savoir nier les propositions.
Objectifs :

- L'étude précise du vocabulaire lié aux ensembles, notamment comment prouver que deux ensembles sont égaux, ainsi que les opérations sur les ensembles notamment l'intersection, l'union et le complémentaire d'ensembles.
- Prolonger (sic) la notion d'application à des ensembles quelconques, donc plus vastes, et introduire la notion d'injection, de surjection pour faire le lien avec la notion de bijection déjà rencontrée dans le cas des fonctions numériques.

Dans ce chapitre, les notions vues sont très générales et applicables à n'importe quels types d'ensembles (nombres, vecteurs, fonctions, suites, matrices, ...) ou d'applications et sera donc utilisé dans de nombreux chapitres ultérieurs.

Table des matières

1 Ensembles

1.1 Définitions

Définition d'un ensemble

On appelle **ensemble** toute collection d'objets appelés **éléments** de cet ensemble. Pour dire qu'un élément x **appartient** à un ensemble E, on écrit $x \in E$. Sinon, on écrit $x \notin E$. On appelle **ensemble vide** l'ensemble constitué d'aucun élément, on le note $\varnothing$. On appelle **singleton** tout ensemble constitué d'un seul élément a, noté $\{a\}$.

Exemple 1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des ensembles usuels de nombres. Ainsi, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ mais $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ et même $\sqrt{2} \in \mathbb{C}$.

Remarque 1. Pour définir un ensemble, on peut procéder par :

- Extension : lister tous les éléments qu'il contient : $F = \{2, 4, 6\}$
- Compréhension : donner une propriété qui caractérise les éléments parmi ceux d'un ensemble : $F = \{k \in \mathbb{N}$ tel que k pair et $1 \leqslant k \leqslant 7\}$. D'une façon générale, $\mathscr{P}(x)$ est une proposition qui dépend de $x \in E$, alors $F = \{x \in E$ tel que $\mathscr{P}(x)\}$ est un ensemble.
- Paramétrage : on donne l'expression des éléments de l'ensemble en fonction d'une variable : $F = \{2k \mid k \in [\![1 ; 3]\!]\}$.

Exemple 2. Donner la définition de $\mathbb{U}_n$ par compréhension, par extension (pour $n = 3$), puis par paramétrage.

Solution des exemples 2 :

- $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$: c'est la définition de $\mathbb{U}_n$ par compréhension : l'ensemble des complexes z qui vérifie la propriété $z^n = 1$.
- $\mathbb{U}_3 = \left\{1, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi}{3}}, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{4\pi}{3}}\right\}$: on a listé les éléments de $\mathbb{U}_3$, ce qui est possible parce qu'il y en a un nombre fini et que ce nombre d'éléments n'est pas trop grand.
- $\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0 ; n-1]\!]\right\}$: on a paramétré les racines n-ièmes à l'aide d'un paramètre k en écrivant les racines n-ièmes sous la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$, il faut bien préciser dans quel ensemble appartient le paramètre k.

Attention à ne pas confondre les éléments dans la définition par compréhension

Si $F = \{k \in [\![0 ; 7]\!] \mid \exists p \in \mathbb{N},\, k = 2p\}$, alors si $k \in [\![0 ; 7]\!]$ avec $k = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, alors $k \in F$, mais p pas forcément.

Définition de l'inclusion entre ensembles

Soient E et F deux ensembles. On dit que F est **inclus** dans E/**sous-ensemble** de E/**une partie** de E si tous les éléments de F appartiennent à E. On note alors $F \subset E$.

Comment démontrer/infirmer une inclusion d'ensemble ?

Pour prouver que $F \subset E$, écrire «soit $x \in F$ (quelconque mais fixé)» puis montrer que $x \in E$.
Pour démontrer que F n'est pas inclus dans E, trouver $x \in F$ tel que $x \notin E$.

Exemples 3.

- $\{1, 3\} \subset \{1, 3, 4\}$
- Si E est un ensemble, alors $\varnothing$ et E sont toujours deux parties de E.
- Écrire, si possible, des inclusions entre $\mathbb{U}_4$, $\mathbb{U}_6$, $\mathbb{U}_{12}$ et $\mathbb{U}$.

Définition de l'égalité de deux ensembles

Soient E et F deux ensembles alors on dit que E et F sont **égaux** si $E \subset F$ et $F \subset E$. On note alors $E = F$.

Exemple 4. $\{a, b, c\} = \{b, a, c\} = \{b, a, c, c\}$: l'ordre des éléments et les répétitions n'ont pas d'importance.

Comment montrer que $E = F$?

Très souvent, on montre $E \subset F$ et $F \subset E$.

Proposition n° 1 : transitivité de l'inclusion

Soient E, F et G trois ensembles, si $E \subset F$ et $F \subset G$ alors $E \subset G$.

Démonstration de la proposition n° 1 : Supposons $E \subset F$ et $F \subset G$. Soit $x \in E$, alors comme $E \subset F$, il en découle que $x \in F$ et comme $F \subset G$, il s'ensuit que $x \in G$. Par conséquent, on a bien montré que $E \subset G$. ■

1.2 Opérations sur les ensembles

Définition de l'union/de l'intersection de deux ensembles

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

- L'**union** de A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B : $A \cup B = \{x \in E \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- L'**intersection** de A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A et dans B : $A \cap B = \{x \in A \mid x \in B\}$
- On dit que A et B sont **disjoints** lorsque $A \cap B = \varnothing$. On dit aussi que $A \cup B$ est une union disjointe.

Remarques 2.
- On a $A \cap B \subset A \subset A \cup B$. Attention, le «ou» étant inclusif, si $x \in A \cap B$, alors $x \in A \cup B$.
- Ne confondez pas distincts et disjoints : $A = \{1, 2\}$ et $B = \{1, 3\}$ sont distincts mais pas disjoints.

Proposition n° 2 : propriétés algébrique de l'intersection et de l'union

Soit E un ensemble et A, B et C trois sous-parties de E.

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$, $A \cup E = E$, $A \cap E = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité de $\cup$)
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité de $\cap$)
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de l'union par rapport à l'intersection)
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de l'intersection par rapport à l'union)

Remarque 3. $A \cup B \cap C$ n'a pas de sens : calculer $(A \cup B) \cap C$ et $A \cup (B \cap C)$ avec $A = \{1, 2\}$, $B = \{3\}$ et $C = \{1\}$.

Définition d'une union/intersection de plusieurs ensembles

Soient A_1, A_2, ... et A_n n parties de E. On appelle, **union** de ces parties l'ensemble des x qui sont dans au moins l'un des A_i et **intersection** de ces parties l'ensemble des x qui sont dans tous les A_i :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in [\![1\,; n]\!] \quad x \in A_i\} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in [\![1\,; n]\!] \quad x \in A_i\}$$

Définition d'un recouvrement, d'une partition

On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment un **recouvrement** de E si $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = E$.

On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une **partition** de E si tous les A_i sont non vides, si c'est un recouvrement et si les A_i sont deux à deux disjoints, c'est-à-dire que : $\forall (i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$

Exemple 5. Posons $E_1 = \mathbb{R}_+^*$, $E_2 = \{0\}$ et $E_3 = \mathbb{R}_-^*$, alors E_1, E_2 et E_3 forment une partition de $\mathbb{R}$.

Remarque 4. On peut aussi faire une union ou une intersection infinie d'ensembles. Ainsi, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est une partie de E, alors on note $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{x \in E \mid \exists k \in \mathbb{N} \quad x \in E_k\}$ et $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} E_k = \{x \in E \mid \forall k \in \mathbb{N} \quad x \in E_k\}$

Définition de la différence de deux ensembles

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E. L'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B est appelé **différence** (ensembliste) de A par B. On note $A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

Remarque 5. Soient A et B deux parties de E. $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$ et $B \cap (A \backslash B) = \varnothing$

Définition du complémentaire d'un sous-ensemble par rapport à un ensemble

Soient E un ensemble et A une partie de E. L'ensemble des éléments qui sont dans E mais pas dans A est appelé **complémentaire** de A dans E. On note $E \backslash A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ ou $\bar{A}$ ou A^c.

Proposition n° 3 : propriétés du complémentaire

Soient A et B deux parties de E.

1. $\overline{A} \cap A = \varnothing$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
5. $A \subset B \iff E \backslash B \subset E \backslash A$

Définition d'un couple de deux éléments

À partir de deux éléments a et b, on forme un nouvel élément appelé **couple** (a, b) défini de sorte que : $(a, b) = (a', b')$ ssi $a = a'$ et $b = b'$.

Exemple 6. $(3, 5)$ est un couple, $(5, 3)$ également, mais $(3, 5) \neq (5, 3)$ alors que $\{3, 5\} = \{5, 3\}$.

Définition du produit cartésien de deux ensembles

On appelle **produit cartésien** de E par F l'ensemble des couples (a, b) avec a dans E et b dans F noté $E \times F$.

Exemple 7. Si $E = \{1, 2\}$ et $F = \{2, 3, 4\}$, alors $E \times F =$

Remarque 6. Si $E \neq F$, $E \times F \neq F \times E$. L'ordre des éléments compte dans le couple.

Définition d'un n-uplet et du produit cartésien de n ensembles

Si $x_1 \in E_1$, $x_2 \in E_2$, ... $x_n \in E_n$, alors on introduit un nouvel objet appelé **n-uplet** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de sorte que :

$$\forall x_1, y_1 \in E_1, \ldots, \forall x_n, y_n \in E_n \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \iff \forall i \in [\![1 ; n]\!] \quad x_i = y_i$$

On note $E_1 \times \ldots \times E_n$ l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec x_i parcourant E_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exemple 8. $\mathbb{R}^3$ est l'ensemble des triplets de réels, $\mathbb{R}^n$ désigne l'ensemble des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels.

Définition de l'ensemble des parties d'un ensemble

On appelle **ensemble des parties** de E l'ensemble, noté $\mathscr{P}(E)$, qui contient exactement les sous-ensembles de E.

Exemples 9. Calculer $\mathscr{P}(\{1\})$, $\mathscr{P}(\{1, 2\})$ et $\mathscr{P}(\{1, 2, 3\})$.

Remarques 7.

- $\mathscr{P}(E)$ est un ensemble d'ensembles : $F \in \mathscr{P}(E)$ ssi $F \subset E$.
- $\{\varnothing\}$ n'est pas l'ensemble vide mais un ensemble constitué d'un unique élément qui est l'ensemble vide.

Attention à ne pas confondre inclusion et appartenance

Si $E = \{1, 2, 3\}$, alors il est vrai que $1 \in E$, $\{1\} \subset E$ et que $\{1\} \in \mathscr{P}(E)$. Par contre, $\{1\} \notin E$ et $1 \not\subset E$. .

2 Applications

2.1 Définition

Définition d'une application (ou d'une fonction)

Soient E et F deux ensembles. On appelle **application/fonction** de E vers F un procédé f qui, à tout élément de $x \in E$, associe un unique élément dans F, noté $f(x)$. E est **l'ensemble de départ** et F est **l'ensemble d'arrivée** de f. Soit $x \in E$ et $y = f(x) \in F$, on dit que y est l'**image** de x par f, on dit aussi que x est **un antécédent** de y par f. On note $f\colon \begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ ou $f\colon E \to F$. L'ensemble des fonctions de E vers F se note $\mathscr{F}(E,F)$ ou F^E.

Exemples 10.

- $f\colon \begin{cases} \{-1,0,1,2\} \longrightarrow \{0,1,4,5\} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ est une fonction.
- La fonction $\mathrm{Id}_E\colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{cases}$ est l'**application identité** de E.
- Soit $c \in F$, la fonction $\begin{cases} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto c \end{cases} \in \mathscr{F}(E,F)$ est une **application constante**.
- Soit $A \subset E$, on appelle **indicatrice** de A l'application $\mathbb{1}_A\colon \begin{cases} E \longrightarrow \{0,1\} \\ x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{cases} \in \{0,1\}^E$.

  Cette application traduit l'appartenance à la partie A : $\forall x \in E \qquad x \in A \iff \mathbb{1}_A(x) = 1$

Péril imminent à ne pas confondre fonction avec élément

Si $x \in E$, $f(x)$ n'est pas une fonction, $f(x)$ n'est qu'un élément de F.

Définition du graphe d'une fonction

On appelle **graphe** de l'application $f\colon E \to F$ l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.

Définition de l'égalité de deux fonctions

On dit que $f\colon E \to F$ est **égal** à $g\colon E' \to F'$ si $E = E'$, $F = F'$ et si tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.

Définition de la restriction d'une application

Soient $f\colon E \to F$ et A une partie de E. On appelle **restriction** de f à A l'application $f_{|A}\colon \begin{cases} A \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$

Exemple 11. Les fonctions $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ et $g\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ sont différentes, g est la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$.

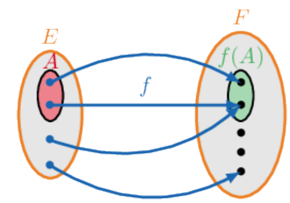
Définition d'un prolongement d'une application

Soit $f\colon A \to F$ avec $A \subset E$. On appelle **prolongement** de f sur E toute fonction $g\colon E \to F$ telle que $g_{|A} = f$ (autrement dit, pour tout $x \in A$, $g(x) = f(x)$).

Exemple 12. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{x} \end{cases}$. Posons $g(x) = \begin{cases} 42 & \text{si} \quad x = 0 \\ f(x) & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$, alors g est un prolongement de f sur $\mathbb{R}$.

Remarques 8.
- Lorsqu'on prolonge, il serait donc cohérent de nommer la nouvelle fonction différemment de la fonction d'origine. Cependant, par abus, il se peut que cela ne soit pas le cas dans un sujet de concours.
- Si $f\colon E \to F$ et que $A \subset E$, la restriction de f à A est unique. En revanche, si $f\colon A \to F$, il n'y a pas unicité des prolongement de f sur E. D'où «la restriction» et «un prolongement».

2.2 Image directe et image réciproque d'une fonction



Définition de l'image directe d'une fonction

Soit $f\colon E \mapsto F$ et A une partie de E, on appelle **image (directe)** de A par f l'ensemble :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = f(x)\}$$

Remarques 9.
- L'ensemble $f(A)$ est défini par paramétrage et par compréhension.
- L'ensemble $f(A)$ est un sous-ensemble de F qui tous les $f(x)$ pour $x \in A$.
- Pour $y \in F$: $$y \in f(A) \iff \exists x \in A \quad y = f(x)$$

Proposition n° 4 : images directes et inclusion

Soit $f\colon E \to F$. Soient A et A' deux parties de E. Si $A \subset A'$ alors $f(A) \subset f(A')$.

Démonstration de la proposition n° 4 : Supposons que $A \subset A'$ Soit $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $x \in A$ et $A \subset A'$ donc $x \in A'$ avec $y = f(x)$, dès lors, $y \in f(A')$. On a donc ainsi montré que $f(A) \subset f(A')$. ■

Remarque 10. Soient A et A' sont deux parties de E, $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

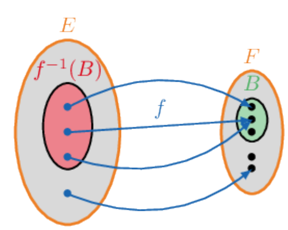
Justification de la remarque 10 : Comme $A \subset A \cup A'$, en appliquant la proposition 4, il vient $f(A) \subset f(A \cup A')$, de même $f(A') \subset f(A \cup A')$. Par conséquent, $f(A) \cup f(A') \subset f(A \cup A')$. Soit $y \in f(A \cup A')$, alors il existe $x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$, il y a donc deux cas :
- Si $x \in A$, alors $y = f(x) \in f(A) \subset f(A) \cup f(A')$ donc $y \in f(A) \cup f(A')$.
- Si $x \in A'$, alors $y = f(x) \in f(A') \subset f(A) \cup f(A')$ donc $y \in f(A) \cup f(A')$.

Dans tous les cas, $y \in f(A) \cup f(A')$. Ceci montre que $f(A \cup A') \subset f(A) \cup f(A')$. Par double inclusion, on a montré que $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$.

Exemple 13. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. Déterminer $f([-1\,;2])$ puis $f(\mathbb{R})$.

Attention à ne pas confondre ensemble d'arrivée et image

Si $f\colon E \to F$, il n'y a aucune raison pour que l'image de f par E vaille F, on a seulement $f(E) \subset F$.



Définition de l'image réciproque d'une fonction

Soit $f\colon E \to F$ et B une partie de F, on appelle **image réciproque** de B par f l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Remarques 11.
- L'ensemble $f^{-1}(B)$ est défini par compréhension.
- L'ensemble $f^{-1}(B)$ est une partie de E qui contient les antécédents par f de tous les éléments de B.
- Pour $x \in E$: $$x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B.$$
- Si $f\colon E \to F$, alors $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $f^{-1}(F) = E$.

Exemple 14. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$. Déterminer $f^{-1}([-1,2])$ ainsi que $f^{-1}([\,-2\,;-1\,])$.

Proposition n° 5 : images réciproques et inclusion

Soit $f\colon E \to F$. Soient B et B' deux parties de F. Si $B \subset B'$ alors $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.

Démonstration de la proposition n° 5 : Supposons $B \subset B'$. Soit $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B$ comme $B \subset B'$, on peut en déduire que $f(x) \in B'$ donc que $x \in f^{-1}(B')$. Par conséquent, on a montré que $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$. ■

Attention il n'y a aucune raison d'avoir $f^{-1}(f(A)) = A$ ou $f(f^{-1}(B)) = B$

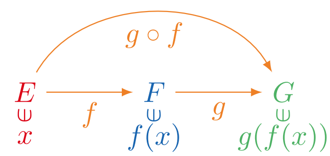
Ici, f^{-1} ne désigne pas la bijection réciproque de f parce que f n'est pas forcément bijective.

Exemple 15. Calculer $f^{-1}(f([\,-1\,;2\,]))$ et $f(f^{-1}([\,-1\,;2\,]))$ pour $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$.

2.3 Composition de fonctions

Définition de la composition de fonctions

Soit $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$. On définit une nouvelle fonction, appelée **composée** de g et de f, par $g \circ f\colon \begin{cases} E \longrightarrow G \\ x \longmapsto g(f(x)) \end{cases}$.



Proposition n° 6 : propriétés de la composition

Soit $f\colon E \to F$, $g\colon F \to G$ et $h\colon G \to H$: $\qquad h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \qquad \mathrm{Id}_F \circ f = f \qquad f \circ \mathrm{Id}_E = f$

Démonstration de la proposition n° 6 :

- Soit $x \in E$, alors $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$, de même $(h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h((g(f(x))))$, ainsi les fonctions $h \circ (g \circ f)\colon E \to H$ et $(h \circ g) \circ f\colon E \to H$ ont la même valeur pour tout $x \in E$ donc sont égales.
- Soit $x \in E$, $(\mathrm{Id}_F \circ f)(x) = \mathrm{Id}_F(f(x)) = f(x)$, ainsi, les fonctions $\mathrm{Id}_F \circ f\colon E \to F$ et $f\colon E \to F$ ont la même valeur pour tout $x \in E$, donc sont égales.
- Soit $x \in E$, $(f \circ \mathrm{Id}_E)(x) = f(\mathrm{Id}_E(x)) = f(x)$, ainsi, $f \circ \mathrm{Id}_E\colon E \to F$ et $f\colon E \to F$ sont deux fonctions qui ont la même valeur pour tout $x \in E$ donc sont égales. ■

Remarque 12. Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to E$, alors on peut à la fois définir $g \circ f\colon E \to E$ et $f \circ g\colon F \to F$. Cependant, généralement, $f \circ g \neq g \circ f$. Si $f\colon E \to E$, $g\colon E \to E$ et $f \circ g = g \circ f$, on dit alors que f et g **commutent**.

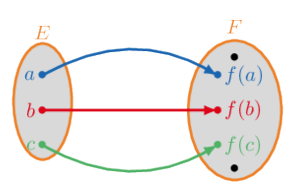
Exemple 16. Est-ce que $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x+2 \end{cases}$ et $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ commutent ?

2.4 Applications injectives

Définition de l'application injective

On dit que $f\colon E \to F$ est une **injection/injective** si tout élément de F a au plus un antécédent par f :

$$\forall (x,x') \in E^2 \qquad f(x) = f(x') \quad \Longrightarrow \quad x = x'$$



Attention à ne pas confondre avec la réciproque :

«$\forall (x,x') \in E^2 \quad x = x' \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(x')$» est vraie pour toutes les fonctions y compris les non injectives.

Remarques 13.
- f n'est pas injective ssi $\exists (x,x') \in E^2 \quad f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$
- On peut aussi formuler la définition d'injectivité par contraposée : $\forall (x,x') \in E^2 \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$

Exemples 17. Les applications $f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2-5x \end{cases}$, $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$, $h\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ sont-elles injectives ?

Proposition n° 7 : une application strictement monotone est injective
Si $A \subset \mathbb{R}$ et que $f\colon A \to \mathbb{R}$ est strictement monotone, alors f est injective.

Démonstration de la proposition n° 7 : Soit $(x,x') \in A^2$, supposons $x \neq x'$, il y a donc quatre cas :
- Si f est strictement croissante et $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$.
- Si f est strictement croissante et $x > x'$ alors $f(x) > f(x')$.
- Si f est strictement décroissante et $x < x'$ alors $f(x) > f(x')$.
- Si f est strictement décroissante et $x > x'$ alors $f(x) < f(x')$.

Dans tous les cas, $f(x) \neq f(x')$, par contraposée, on a démontré que f est injective. ■

Proposition n° 8 : composée de deux injections
Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux fonctions injectives, alors $g \circ f\colon E \to G$ est injective.

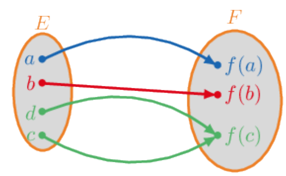
Démonstration de la proposition n° 8 : Supposons $f\colon E \to F$ et $g\colon E \to G$ injectives. Soient $(x,x') \in E^2$. Supposons que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Ceci veut dire que $g(f(x)) = g(f(x'))$, comme g est injective, on en déduit que $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, il s'ensuit que $x = x'$. Ainsi, $g \circ f$ est injective. ■

2.5 Applications surjectives

Définition d'une application surjective

On dit que $f\colon E \to F$ est une **surjection/surjective** si tout élément de F a au moins un antécédent par f :

$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \qquad y = f(x)$$



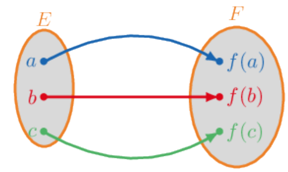
Exemples 18. Les applications $f\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$, $g\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ sont-elles surjectives ? Si l'une l'est et pas l'autre, c'est bien parce qu'en dépit des apparences, ce sont deux applications différentes.

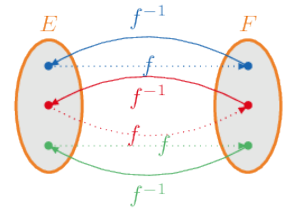
Remarques 14.
- Pour justifier la surjectivité de $f : E \to F$, il suffit, pour chaque $y \in F$, de justifier l'existence d'une solution à l'équation $y = f(x)$.
- $f\colon E \to F$ n'est pas surjective si :
- $f\colon E \to F$ est surjective est équivalent à $f(E) = F$.
- Si $f\colon E \to F$, alors nécessairement $g\colon \begin{cases} E \longrightarrow f(E) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est surjective.

Proposition n° 9 : composée de deux surjections
Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont deux fonctions surjectives, alors $g \circ f\colon E \to G$ est surjective.

Démonstration de la proposition n° 9 : Supposons que $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ soient surjectives. Montrons que $g \circ f\colon E \to G$ est surjective. Soit $z \in G$, alors comme $g\colon F \to G$ est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Or, $f\colon E \to F$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Par conséquent, $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$. On a donc montré que $g \circ f\colon E \to G$ est surjective. ■

2.6 Applications bijectives





Définition d'une application bijective et de son application réciproque

On dit que $f\colon E \to F$ est une **bijection/bijective** si tout élément de F a exactement un antécédent par f :

$$\forall y \in F \quad \exists! x \in E \qquad y = f(x)$$

Si f est bijective, pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$, on pose $f^{-1}(y) = x$. Ceci définit une application $f^{-1}\colon F \to E$ appelée **bijection réciproque** de f.

Exemples 19. $f\colon \begin{cases} [\,0\,;\pi\,] \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ \quad x \quad \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ est bijective, contrairement à $g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [\,-1\,;1\,] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$.

Proposition n° 10 : caractérisation de la bijectivité

Soit $f\colon E \to F$. On a équivalence entre :

1. f est bijective.
2. f est injective et surjective.
3. $\exists g \in \mathscr{F}(F,E) \mid g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.

Si c'est le cas, nécessairement un tel g est unique et vaut $g = f^{-1}$.

Démonstration de la proposition n° 10 :

- Si f est bijective, alors f est injective et surjective.
- Si f est injective et surjective, alors f est bijective.
- Si f est bijective, alors pour tout $x \in E$, posons $y = f(x)$ de sorte que $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ et pour tout $y \in F$, posons $x = f^{-1}(y)$ de sorte que $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$, ainsi, en posant $g = f^{-1}$, on a montré qu'il existait $g \in \mathscr{F}(F,E)$ telle $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Et
- S'il existe $g \in \mathscr{F}(F,E)$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Montrons que f est injective, soit $(x,x') \in E^2$, supposons que $f(x) = f(x')$, alors $g(f(x)) = g(f(x'))$ donc $\mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{Id}_E(x')$ ainsi $x = x'$ et f est injective. Montrons que f est surjective. Soit $y \in F$, alors $f(g(y)) = y$, ainsi y admet au moins un antécédent par f et donc f est surjective.

Ainsi, on a montré que 1. $\iff$ 2., 1. $\implies$ 3. et 3. $\implies$ 2., on a ainsi démonté toutes les équivalences. Soit $g\colon F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$, alors en composant par f^{-1}, on obtient $f^1 \circ f \circ g = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_E$ et donc $g = f^{-1}$. ■

Remarques 15.
- Si $f\colon E \to F$ est bijective, alors $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$.
- La proposition 11 montrera que $f^{-1}\colon F \to E$ est bijective ce qui justifiera le nom de **bijection réciproque**.
- Si f est strictement monotone sur un intervalle I, le théorème de la bijection strictement monotone affirmait que $f\colon I \to f(I)$ était bijective, mais c'est la conséquence immédiate de la proposition 7 et de la remarque 14.

Proposition n° 11 : propriétés de la bijection réciproque

1. Si $f\colon E \to F$ est bijective alors $f^{-1}\colon F \to E$ est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
2. Si $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ sont bijectives alors $g \circ f\colon E \to G$ aussi et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.
3. Si $f\colon E \to F$ est bijective et $B \subset F$, alors $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$ *(c'est pas du troll)*

Démonstration de la proposition n° 11 :

1. D'après la proposition 10, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. Notons $g = f$. Ainsi, il existe $g\colon E \to F$ telle que $f^{-1} \circ g = \mathrm{Id}_E$ et $g \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$. En appliquant la proposition 10 à f^{-1}, on peut en déduire que $f^{-1}\colon F \to E$ est bijective et que $(f^{-1})^{-1} = g = f$.
2. Par associativité de la composition,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$$
$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$

Ainsi, en appliquant, la proposition 10, on en déduit que $g \circ f\colon E \to G$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

3. Notons C l'image réciproque de B par la fonction f et D l'image directe de B par la fonction f^{-1}. Ainsi, $C = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$ et $D = \left\{f^{-1}(y) \mid y \in B\right\} = \left\{x \in E \mid \exists y \in B \quad x = f^{-1}(y)\right\}$. Montrons que $C = D$.
   - Soit $x \in C$, alors $f(x) \in B$. Notons $y = f(x) \in B$. Alors, $x = f^{-1}(y)$ avec $y \in B$, ce qui montre que $x \in D$. Ceci démontre que $C \subset D$.
   - Soit $x \in D$, alors il existe $y \in B$ tel que $x = f^{-1}(y)$, dès lors, $f(x) = y \in B$ donc $x \in C$. Ceci démontre que $D \subset C$.

   Ainsi, par double inclusion, $D = C$ donc $f^{-1}(B) = f^{-1}(B)$. ■

Quels sont les méthodes pour montrer que $f\colon E \to F$ est bijective ?

1. Fixer $y \in F$ et démontrer que l'équation, d'inconnue x, $f(x) = y$ admet une unique solution dans E.
2. Montrer que f est injective et surjective.
3. Écrire f comme une composée de fonctions bijectives.
4. Trouver $g\colon F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$.
5. Si $f\colon I \to J$ est continue et strictement monotone, alors f est bijective ssi $f(I) = J$ (avec I intervalle de $\mathbb{R}$)

Exemple 20. Démontrer que $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto (x + 2y + 3, 2x + 3y - 8) \end{cases}$ est bijective et déterminer f^{-1}.

Attention préciser les ensembles de départ et d'arrivée pour les injections/surjections/bijections

Certains fonctions ont la particularité d'être injectives/surjectives/bijectives uniquement parce que les ensembles de départ et d'arrivée sont cohérents. Méditez les exemples 17, 18 et 19.