Exercice 1 : il ne faut pas traiter intégralement les primitives comme des sauvages

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4)$, ainsi il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{5, -4\}$,

$$\frac{1}{x^2 - x - 20} = \frac{1}{(x-5)(x+4)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+4}$$

En multipliant par $x - 5$ et en faisant tendre x vers 5, on trouve $\frac{1}{9} = A$. En multipliant par $x + 4$ et en faisant tendre x vers -4, on trouve $\frac{1}{-9} = B$. Ainsi, $x \mapsto \frac{1}{x^2 - x - 20} = \frac{1}{9} \times \frac{1}{x-5} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{x+4}$ admet comme primitive $x \mapsto \frac{1}{9}\ln(|x-5|) - \frac{1}{9}\ln(|x+4|)$ sur $]-\infty\,; -4\,[$, sur $]-4\,; 5\,[$ ou sur $]\,5\,; +\infty\,[$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^2 + 3x + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 3 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan\left(2\frac{x + \frac{3}{2}}{\sqrt{3}}\right)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 3x + 3}$ sur $\mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2 + 12x + 36}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \frac{1}{(x+6)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-1}{x+6}\right]_2^3 = \frac{-1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{1}{72}$

4. On pose $u\colon x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et $v\colon x \mapsto \ln(x)$, $(u, v) \in \mathscr{C}^1([\,1\,; \mathrm{e}\,], \mathbb{R})^2$, $u'\colon x \mapsto 1$ et $v'\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. Par intégration par parties

$$\int_1^{\mathrm{e}} x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 + 1}{4}$$

5. On pose $u\colon x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $v\colon x \mapsto \ln(x)$, $(u, v) \in \mathscr{C}^1([\,1\,; \mathrm{e}\,], \mathbb{R})^2$, $u'\colon x \mapsto x^2$ et $v'\colon x \mapsto \frac{1}{x}$. Par intégration par parties

$$\int_1^{\mathrm{e}} x^2\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^3}{3x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \left[\frac{x^3}{9}\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^3}{3} - \frac{\mathrm{e}^3}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2\mathrm{e}^3 + 1}{9}$$

6. On pose $t = \ln(x)$, alors $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}$, donc $\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, ainsi,

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}x}{x + 3x\ln(x)} = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^t t} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1 + 3t} = \left[\frac{1}{3}\ln(1 + 3t)\right]_0^1 = \frac{\ln(4)}{3}$$

7. On pose $u = \ln(t)$, alors $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc $\mathrm{d}t = t\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int^x \cos(\ln(t))\,\mathrm{d}t &= \int^{\ln(x)} \cos(u)\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \int^{\ln(x)} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u})\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \int^{\ln(x)} \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,u}\mathrm{e}^u)\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{Re}\left(\int^{\ln(x)} \mathrm{e}^{u(\mathrm{i}+1)}\,\mathrm{d}u\right) = \mathrm{Re}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{u(\mathrm{i}+1)}}{\mathrm{i}+1}\right]^{\ln(x)}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\ln x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(x)}(1-\mathrm{i})}{2}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{x(\cos(\ln(x)) + \mathrm{i}\sin(\ln(x)))(1-i)}{2}\right) = \frac{x\cos(\ln(x)) + x\sin(\ln(x))}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $x \mapsto \frac{x\cos(\ln(x)) + x\sin(\ln(x))}{2}$ est une primitive de $x \mapsto \cos(\ln(x))$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2 : quatre fonctions de référence pour faire un gâteau anglais

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^{-x} > 0$, ainsi, $\mathrm{sh}(x) < \mathrm{ch}(x)$. De même, $\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \mathrm{e}^{x} > 0$, ainsi, $\mathrm{sh}(x) > -\mathrm{ch}(x)$. Ainsi, $-\mathrm{ch}(x) < \mathrm{sh}(x) < \mathrm{sh}(x)$. En divisant par $\mathrm{ch}(x) > 0$, on obtient, $-1 < \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x) < 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x) \in]-1\,;1[$ et donc $\mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x)$ est dans l'ensemble de définition d'arccos. Ainsi, on pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \arccos\left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right) + 2\arctan(\mathrm{e}^{x})$. Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow]-1\,;1[\\ x \longmapsto \mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x) \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, arccos est dérivable sur $]-1\,;1[$, par composition $x \mapsto \arccos(\mathrm{sh}(x)/\mathrm{ch}(x))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, par composition, $x \mapsto \arctan(\mathrm{e}^{x})$ est également dérivable sur $\mathbb{R}$. Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}\right)^2}} + 2\mathrm{e}^{x} \times \frac{1}{1 + (\mathrm{e}^{x})^2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \times \frac{-1}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}}} + \frac{2}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}} = \frac{-\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} + \frac{2}{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}} = \frac{-1}{\mathrm{ch}(x)} + \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée de f est nulle sur $\mathbb{R}$. La fonction est constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) = \arccos(0) + 2\arctan(1) = \dfrac{\pi}{2} + 2 \times \dfrac{\pi}{4} = \pi$

Exercice 3 : les intégrales sont de la party !

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n}$.

1. Par linéarité de l'intégrale :

$$u_n - u_{n+1} = \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^n}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1 + x^2}{(1 + x^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1 + x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

2. Posons $u\colon x \mapsto x$ et $v\colon x \mapsto (1 + x^2)^{-n}$. Alors $(u, v) \in \mathscr{C}^1([0\,;1], \mathbb{R})^2$. Par dérivation, $u'\colon x \mapsto 1$ et $v'\colon x \mapsto -2nx(1 + x^2)^{-n-1}$, ainsi par intégration par parties :

$$u_n = \int_0^1 1 \times \frac{1}{(1 + x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \left[x(1 + x^2)^{-n}\right]_0^1 - \int_0^1 x \times (-2nx(1 + x^2)^{-n-1})\,\mathrm{d}x = 2^{-n} + 2n\int_0^1 \frac{x^2}{(1 + x)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, en utilisant la question 1, $u_n = 2^{-n} + 2n(u_n - u_{n+1})$ soit encore $u_n(1 - 2n) = 2^{-n} - 2nu_{n+1}$, donc $u_n(2n - 1) + 2^{-n} = 2nu_{n+1}$. Finalement,

$$u_{n+1} = u_n\frac{2n - 1}{2n} + \frac{1}{2^{n+1}n}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n - u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}x$. Remarquons que pour tout $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{x^2}{(1 + x^2)^{n+1}} \geqslant 0$, par positivité de l'intégrale $u_n - u_{n+1} \geqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_n$ est donc décroissante.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{(1 + x^2)^n} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, $u_n \geqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_n$ est donc une suite convergente.

Remarque 1. Cela ne permet pas de déterminer la limite.

Exercice 4 : montrer toute l'amplitude de vos capacités

1. Posons $z = 3 - 3\mathrm{i}\sqrt{3}$, alors $|z| = \sqrt{9+27} = 6$. Ainsi, $z = 6\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 6\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

2. L'équation $y'' + 6y' + 13y = 0$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 + 6r + 13 = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = 36 - 4 \times 13 = -16 = (4\mathrm{i})^2$. Ainsi, les racines de cette équation sont

$$\frac{-6+4\mathrm{i}}{2} = -3+2\mathrm{i} \qquad \text{et} \qquad \frac{-6-4\mathrm{i}}{2} = -3-2\mathrm{i}$$

Ainsi, les solutions réelles de l'équation homogène sont exactement les fonctions

$$x \mapsto \mathrm{e}^{-3x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right)$$

avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. De plus, comme le second membre est une fonction constante (polynomiale de degré 0), on cherche une solution particulière y_p de la forme $y_p \colon x \mapsto c$. On a lors, $0 + 0 + 13c = 26$. Ainsi, $c = 2$. Ainsi, $x \mapsto 2$ est une solution particulière. Par conséquent, les solutions de l'équation $y'' + 6y' + 13y = 26$ sont exactement les fonctions

$$x \mapsto 2 + \mathrm{e}^{-3x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right)$$

avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$. Fixons $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ et $f \colon x \mapsto 2 + \mathrm{e}^{-3x}\left(A\cos(2x) + B\sin(2x)\right)$, alors $f(0) = 2 + A$, Ainsi, $f(0) = 5$ ssi $A = 3$. Prenons alors $A = 3$ de plus, par produit, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -3\mathrm{e}^{-3x}(A\cos(2x) + B\sin(2x)) + \mathrm{e}^{-3x}(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

ainsi, $f'(0) = -3A + 2B = -9 + 2B$, ainsi, $f'(0) = -6\sqrt{3} - 9$ ssi $B = -3\sqrt{3}$. Ainsi, $f \colon x \mapsto 2 + \mathrm{e}^{-3x}\left(3\cos(2x) - 6\sqrt{3}\sin(2x)\right)$ est l'unique solution du système demandée. En factorisant par 6 :

$$f \colon x \mapsto 2 + 6\mathrm{e}^{-3x}\left(\frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{3}}{6}\sin(2x)\right) = 2 + 6\mathrm{e}^{-3x}\cos(2x + \frac{\pi}{3})$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   (a) $f(x) = 2$ ssi $6\mathrm{e}^{-3x}\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$ ssi $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 0$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$
   (b) $f(x) = 2 + 6\mathrm{e}^{-3x}$ ssi $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x + \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi$
   (c) $f(x) = 2 - 6\mathrm{e}^{-3x}$ ssi $\cos(2x + \frac{\pi}{3}) = -1$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $2x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2k\pi$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$

4. Voir figure.

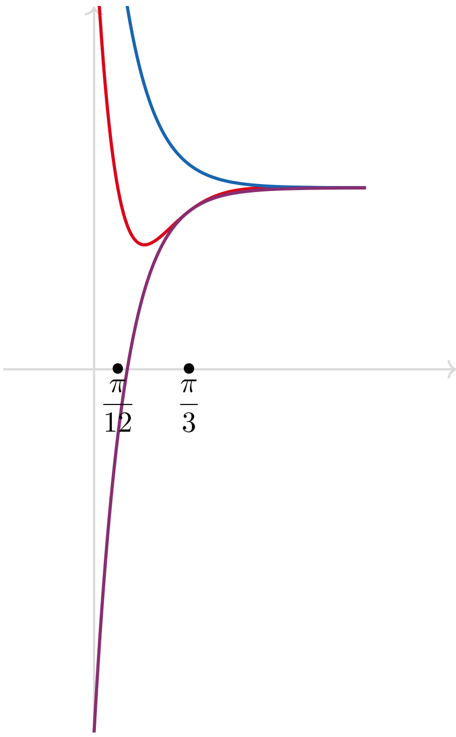

FIGURE 1 – En rouge la courbe de f, en bleu la courbe de $x \mapsto 2 + 6\mathrm{e}^{-3x}$ et en violet la courbe de $x \mapsto 2 - 6\mathrm{e}^{-3x}$.

Problème : va falloir brancher Lambert

1. Remarquons que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ par produit de limites infinies et $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$ par croissances comparées. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = 1\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (x+1)\mathrm{e}^x$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$, on peut en conclure que $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$ si $x > -1$ et $f'(x) < 0$ si $x < -1$, ainsi, f est strictement croissante sur $[-1\,;+\infty[$ et f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;-1]$. =et par croissance comparée, $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$.

2.

3. L'équation de la tangente en 0 est $y = f'(0)x + f(0) = x$.
L'équation de la tangente de f en -1 est $y = f'(-1)x + f(-1) = -\mathrm{e}^{-1}$.

4. g est strictement croissante et continue sur $[-1\,;+\infty[$. Ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, g réalise une bijection de $[-1\,;+\infty[$ vers l'intervalle

$$g([-1\,;+\infty[) = \left[g(0)\,;\lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$$

5. Soit $x \in]-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$. Posons $a = W(x) \in [-1\,;+\infty[$. Remarquons que si $a = -1$, alors $x = g(a) = g(-1) = -\mathrm{e}^{-1}$ ce qui est exclus, donc $a > -1$, ainsi g est dérivable en a et $g'(a) > 0$. Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité de la bijection réciproque W est dérivable en x. Ainsi, W est dérivable sur $]-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty[$.

6. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que $0 = W(0)$.
D'après la formule du cours
$$W'(0) = \frac{1}{g'(W(0))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

7. L'équation de la tangente à la courbe de W au point d'abscisse 0 est $y = W'(0)x + W(0) = x$.
La tangente à la courbe de W au point d'abscisse $-\mathrm{e}^{-1}$ est verticale d'équation $x = -\mathrm{e}^{-1}$.
(car celle de f est horizontale au point $x = -1$)

8.

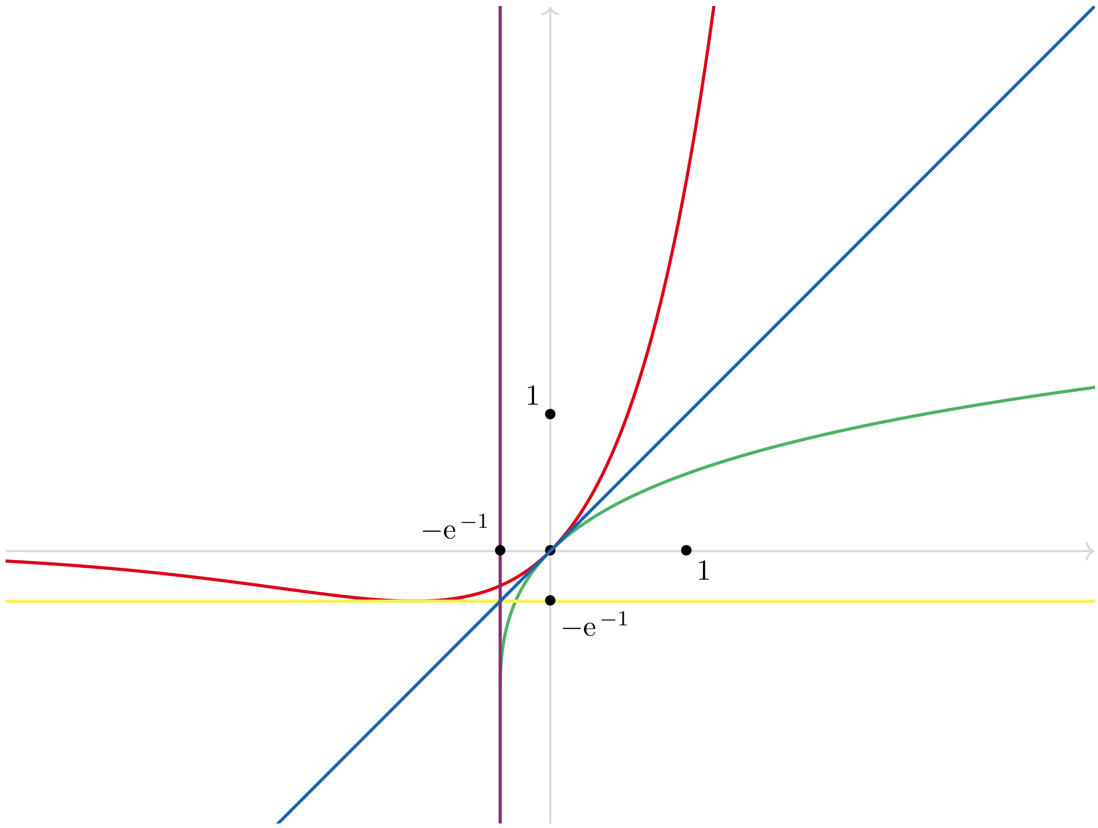

FIGURE 2 – En rouge la courbe de f. En jaune la tangente de f en -1. En vert la courbe de W, en violet la courbe de W en $-\mathrm{e}^{-1}$ et en bleu la tangente commune de f et de W en 0.

9. Soit $x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}\,;+\infty\right[\setminus\{0\}$ D'après le théorème de la dérivation de la bijection réciproque :

$$W'(x) = \frac{1}{g'(W(x))} = \frac{1}{(W(x)+1)\mathrm{e}^{W(x)}}$$

Mais $g(W(x)) = x$ soit $W(x)\mathrm{e}^{W(x)} = x$. Comme $x \neq 0$, on peut en déduire que $W(x) \neq 0$ et donc que $\mathrm{e}^{W(x)} = \dfrac{x}{W(x)}$ soit :

$$W'(x) = \frac{1}{(W(x)+1)\dfrac{x}{W(x)}} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

10. De même qu'à la question 4, l'application h est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;-1\right]$ et continue. Ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, h réalise donc une bijection de l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right]$ vers l'intervalle

$$h(\left]-\infty\,;-1\right]) = \left[h(-1)\,;\lim_{x\to-\infty} h(x)\right[= \left[-\mathrm{e}^{-1}\,;0\right[$$

11. Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions :
   - Si $m < -\mathrm{e}^{-1}$. Pour $x \in \left]-\infty\,;-1\right]$, $x \leqslant 1$, par décroissance de f sur $\left]-\infty\,;-1\right]$, $f(x) \geqslant f(-1) > m$. Pour $x \in \left[-1\,;+\infty\right[$, $x \geqslant 1$, par croissance de f sur $\left[-1\,;+\infty\right[$, $f(x) \geqslant f(-1) > m$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > m$. Donc $\mathcal{S} = \varnothing$: zéro solution.
   - Si $m = -\mathrm{e}^{-1}$ Pour $x \in \left]-\infty\,;-1\right[$, $x < 1$, par décroissance stricte de f sur $\left]-\infty\,;-1\right]$, $f(x) > f(-1) = m$. Pour $x \in \left[-1\,;+\infty\right[$, $x > 1$, par croissance stricte de f sur $\left[-1\,;+\infty\right[$, $f(x) > f(-1) > m$. Si $x = -1$, $f(x) = m$. Donc $\mathcal{S} = \{-1\}$: une seule solution.
   - Si $-\mathrm{e}^{-1} < m < 0$, Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \geqslant -1$, alors $f(x) = m$ ssi $g(x) = m$ ssi $x = W(m)$. Si $x \leqslant -1$, alors $f(x) = m$ ssi $h(x) = m$ ssi $x = W(m)$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{V(m), W(m)\}$. Notons que si $V(m) = W(m)$, alors nécessairement $m = -\mathrm{e}^{-1}$ ce qui est exclus ici, donc $V(m) \neq W(m)$, il y a donc deux solutions.
   - Si $m \geqslant 0$, Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_-^*$, $f(x) < 0 \leqslant m$. Et pour $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = m$ ssi $g(x) = m$ ssi $x = W(m)$. Donc $\mathcal{S} = \{W(m)\}$: une seule solution.