Nagez dans la baie de la Somme !

1. $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k = u_2 \times \dfrac{1-2^{n-2+1}}{1-2} = u_4 \times 2^{2-4} \times (2^{n-1}-1) = 2(2^{n-1}-1) = 2^n - 2$
2. Comme c'est une somme télescopique, $\sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$
3. Si $(a,b,n) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
4. On effectue le changement d'indice $j = k-1$:
$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k-1} 3^{k+1} = \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} 3^{j+2} = 9\left(\sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} 3^j\right)$$
$$= 9\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 3^j 1^{n-j} - \underbrace{\binom{n}{0} 3^0 1^{n-0}}_{\text{terme pour } j=0} - \underbrace{\binom{n}{n} 3^n 1^{n-n}}_{\text{terme pour } j=n}\right) = 9(4^n - 1 - 3^n)$$
5. Ici, on a un choix, sommer sur i d'abord puis par j ou l'inverse, les deux fonctionnent en reconnaissant des sommes de suites géométriques (de raison $\dfrac{1}{2}$ puis de raison 2 ou l'inverse)
   - Si on prend j comme indice de la première somme :
$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{j-i} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{j} 2^j \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^j}{1-\frac{1}{2}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{2^{j-1} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} 2^j - 1 = \sum_{j=1}^{n} 2^j - \sum_{j=1}^{n} 1 = 2\frac{1-2^n}{1-2} - n = 2^{n+1} - 2 - n$$
   - Si on prend i comme indice de la première somme :
$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{j-i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} 2^j \left(\frac{1}{2}\right)^i\right) = \sum_{i=1}^{n} 1 \times \frac{1-2^{n-i+1}}{1-2} = \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1-i} - 1$$
$$= \sum_{i=1}^{n} 2^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=1}^{n} 1 = 2^n \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - n = 2^{n+1} - 2 - n$$

Arccos, ce sale gosse !

1. Présentons deux méthodes :
   - Soit $x \in \mathbb{R}$,
     — En effectuant la différence : $1 - \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = \dfrac{2x^2}{1+x^2} \geqslant 0$, donc $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$
     — En effectuant la différence : $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} - (-1) = \dfrac{2}{1+x^2} \geqslant 0$ donc $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$,
     — Comme $-x^2 \leqslant x^2$, il vient $1 - x^2 \leqslant 1 + x^2$, en divisant cette inégalité par $1 + x^2 > 0$, on en déduit que $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$.
     — $-1 \leqslant 1$, ainsi $-1 - x^2 \leqslant 1 - x^2$, en divisant cette inégalité par $1 + x^2 > 0$, il vient, $-1 \leqslant \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

   En conclusion, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1\,;1]$

2. Comme arccos est définie sur $[-1\,;1]$, et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\in[-1\,;1]$, f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. arccos est dérivable sur $]-1\,;1[$, pour que f soit dérivable en $x\in\mathbb{R}$, il suffit, par composition que $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\in\,]-1\,;1[$. Or, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\in[-1\,;1]$, de plus, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=1$ ssi $1-x^2=1+x^2$ ssi $2x^2=0$ ssi $x=0$, et $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=-1$ ssi $1-x^2=-1-x^2$ ssi $1=-1$, ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\neq-1$, ainsi, $g\colon x\mapsto\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, définie sur $\mathbb{R}^*$ et à valeurs dans $]-1\,;1[$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\arccos\colon\,]-1\,;1[\,\to\mathbb{R}$ est dérivable sur $]-1\,;1[$, par composée[1], $f=\arccos\circ g$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{-2x(1+x^2)-2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\times\frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\\&=\frac{4x}{(1+x^2)^2\sqrt{\dfrac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}}\\&=\frac{4x}{(1+x^2)^2\dfrac{\sqrt{4x^2}}{1+x^2}}=\frac{2x}{(1+x^2)|x|}\end{aligned}$$

4. Pour $x>0$, $f'(x)=\dfrac{2}{1+x^2}$, ceci prouve que f est une primitive de $x\mapsto\dfrac{2}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, tout comme $2\arctan$. Or, toutes les primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante additive. Ainsi, il existe $C\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $x>0$, $f(x)=2\arctan(x)+C$, ainsi, $f(1)=2\arctan(1)+C$, or $f(1)=\arccos(0)=\dfrac{\pi}{2}$ et $2\arctan(1)=\dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent, $C=0$, ainsi pour tout $x>0$, $f(x)=2\arctan(x)$

   Remarque 1. Comme $f(0)=0$ et $\arctan(0)=0$ cette égalité est encore vraie pour $x=0$. Si $x<0$, alors, par parité de f, $f(x)=f(-x)=2\arctan(-x)=2\arctan(|x|)$. Ainsi, la fonction f est la fonction $x\mapsto2\arctan(|x|)$ sur $\mathbb{R}$.

1-T-Célèbre coupe

1. En proposant deux méthodes

   - En reconnaissant la forme $u'u^2$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(x)\sin(x)^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{\sin^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^3}{3}-0=\frac{\sqrt3}{8}$.
   - En posant[2] $t=\sin(x)$, alors $\mathrm{d}t=\cos(x)\,\mathrm{d}x$, ainsi,

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos(x)\sin(x)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac12}u^2\,\mathrm{d}u=\left[\frac{u^2}{3}\right]_0^{\frac12}=\frac{\left(\frac{\sqrt3}{2}\right)^3}{3}-0=\frac{\sqrt3}{8}$$

2. On pose $u\colon x\mapsto x$ et $v\colon x\mapsto-\cos(x)$, de sorte que u et v soient des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,;\pi/6]$, alors $u'\colon x\mapsto1$ et $v'\colon x\mapsto\sin(x)$, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}}\underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{\sin(x)}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x&=[\underbrace{x}_{u(x)}\underbrace{(-\cos(x))}_{v(x)}]_0^{\frac{\pi}{6}}-\int_0^{\frac{\pi}{6}}\underbrace{1}_{u'(x)}\times\underbrace{(-\cos(x))}_{v'(x)}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt3}{2}+[\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}\\&=-\frac{\sqrt3\pi}{12}+\frac12\end{aligned}$$

1. Notez que cela n'indique pas si f est dérivable en 0 ou non, car le théorème de dérivation d'une composée ne dit rien si l'une des deux fonctions n'est pas dérivable en un point.

2. Si on ne sait pas s'il faut poser $t=\sin(x)$ ou $t=\cos(x)$, on tente les deux au brouillon, le premier qui marche, on le fait.

3.

$$\begin{aligned}\cos(a)\cos(b) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,a}}{2}\times\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,b}}{2}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(a+b)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(a+b)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(a-b)}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(b-a)}}{4}\\ &= \frac{2\cos(a+b)+2\cos(a-b)}{4} = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)+\cos(a-b)\right)\end{aligned}$$

4. Soit $(m,n)\in\mathbb{Z}^2$
   - Si $m\neq n$ et $m\neq -n$, en utilisant la question précédente :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(mt+nt)+\cos(mt-nt)\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{1}{2}\frac{\sin((m+n)t)}{m+n}+\frac{1}{2}\frac{\sin((m-n)t)}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

   - Si $m=n\neq 0$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(mt+nt)+\cos(mt-nt)\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(2mt)+1\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(2mt)}{2m}+t\right)\right]_0^{2\pi} = \pi\end{aligned}$$

   - Si $m\in\mathbb{Z}^*$ et $m=-n$, alors en utilisant la parité du cosinus, on utilise le cas précédent : $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\cos(mt)\cos(-mt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\cos(mt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t = \pi$
   - Si $m=n=0$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos(mt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t = [t]_0^{2\pi} = 2\pi$.

5. On pose $u=\mathrm{e}^t$, alors $\mathrm{d}u=\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$, ainsi,

$$\int^x \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2t}+11\mathrm{e}^t+18} = \int^{\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{d}u}{u^2+11u+18} = \int^{\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{d}u}{(u+9)(u+2)}$$

Or, il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{-2,-9\}$, $\dfrac{1}{(u+9)(u+2)} = \dfrac{A}{u+9}+\dfrac{B}{u+2}$, en multipliant par $u+9$ et remplaçant, u par -9, il vient $A=-\dfrac{1}{7}$, en multipliant par $u+2$ et en remplaçant u par -2, il vient $B=\dfrac{1}{7}$, ainsi,

$$\begin{aligned}\int^x \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2t}+11\mathrm{e}^t+18} &= \int^{\mathrm{e}^x} -\frac{1}{7}\times\frac{1}{u+9}+\frac{1}{7}\times\frac{1}{u+2}\,\mathrm{d}u\\ &= [-\frac{1}{7}\ln(|u+9|)+\ln(|u+2|)]^{\mathrm{e}^x}\\ &= \frac{1}{7}\ln\left(\frac{2+\mathrm{e}^x}{9+\mathrm{e}^x}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $x\mapsto\dfrac{1}{7}\ln\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^x}{9+\mathrm{e}^x}\right)$ est une primitive de $x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+11\mathrm{e}^x+18}$ sur $\mathbb{R}$

6. Proposons deux méthodes :
   - $x\mapsto\dfrac{1}{2}\times 2x\times\dfrac{1}{1+(x^2)^2}$ se primitive en $x\mapsto\dfrac{1}{2}\arctan(x^2)$.

- On cherche à calculer $\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4}$, cela ressemble à de la dérivée d'arctan, on pose alors $u = t^2$, alors $\mathrm{d}u = 2t\,\mathrm{d}t$, donc $t\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2}$, ainsi, par changement de variable

$$\int^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^4} = \int^{x^2} \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{1+u^2} = \left[\frac{1}{2}\arctan(u)\right]^{x^2} = \frac{1}{2}\arctan(x^2)$$

Donc $x \mapsto \frac{1}{2}\arctan(x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{x}{1+x^4}$.

Appliquez-vous pour résoudre ce système

Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x,y,z) = (x+2y+2z, 4x+8y+2z, -3x+2y+3z) \in \mathbb{R}^3$, ainsi, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

1. Soient $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x & +2y & +2z & = 11 \\ 4x & +8y & +2z & = 26 \\ -3x & +2y & +3z & = 10 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\iff} \begin{cases} x & +2y & +2z & = 11 \\ & & -6z & = -18 \\ & +8y & +9z & = 43 \end{cases} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x & +2y & +2z & = 11 \\ & +8y & +9z & = 43 \\ & & z & = 3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z & = 3 \\ y & = 2 \\ x & = 1 \end{cases}$$

Ainsi, $(1,2,3)$ est l'unique solution de ce système.

2. Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Alors, (x,y,z) est un antécédent de $(11,26,10)$ par f ssi $f(x,y,z) = (11,26,10)$ ssi $\begin{cases} x+2y+2z & = 11 \\ 4x+8y+2z & = 26 \\ -3x+2y+3z & = 10 \end{cases}$ ssi $(x,y,z) = (1,2,3)$ (en utilisant la question précédente). Ainsi, $(1,2,3)$ est le seul antécédent de $(11,26,10)$ par la fonction f.

3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ fixé. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = (a,b,c) \iff \begin{cases} x & +2y & +2z & = a \\ 4x & +8y & +2z & = b \\ -3x & +2y & +3z & = c \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1}}{\iff} \begin{cases} x & +2y & +2z & = a \\ & & -6z & = b-4a \\ & +8y & +9z & = c+3a \end{cases}$$
$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\iff} \begin{cases} x & +2y & +2z & = & a \\ & +8y & +9z & = & c+3a \\ & & z & = & \frac{b-4a}{-6} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & = & a-2y-2z \\ y & = & \dfrac{c+3a-9\left(\frac{2a}{3}-\frac{b}{6}\right)}{8} & = -\frac{3a}{8}+\frac{3b}{16}+\frac{c}{8} \\ z & = & \frac{2a}{3}-\frac{b}{6} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x & = & \left(1+\frac{6}{8}-\frac{4}{3}\right)a + \left(-\frac{3}{8}+\frac{1}{3}\right)b + \left(-\frac{1}{4}\right)c \\ y & = & \frac{-3a}{8}+\frac{3b}{16}+\frac{c}{8} \\ z & = & \frac{2a}{3}-\frac{b}{6} \end{cases}$$
$$\iff (x,y,z) = \left(\frac{5a}{12}-\frac{b}{24}-\frac{c}{4}, \frac{-3a}{8}+\frac{3b}{16}+\frac{c}{8}, \frac{2a}{3}-\frac{b}{6}\right)$$

Ainsi, (a,b,c) admet un unique antécédent par f qui vaut $\left(\frac{5a}{12}-\frac{b}{24}-\frac{c}{4}, \frac{-3a}{8}+\frac{3b}{16}+\frac{c}{8}, \frac{2a}{3}-\frac{b}{6}\right)$, la fonction $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est donc bijective et $f^{-1}\colon (a,b,c) \mapsto \left(\frac{5a}{12}-\frac{b}{24}-\frac{c}{4}, \frac{-3a}{8}+\frac{3b}{16}+\frac{c}{8}, \frac{2a}{3}-\frac{b}{6}\right)$

4. $f(A) = \{f(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(x, 4x, -3x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ (droite passant par l'origine et de vecteur directeur $(1, 4, -3)$).
5. Comme f est bijective, $f^{-1}(A) = \{f^{-1}(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\} = \left\{\left(\frac{5x}{12}, -\frac{3x}{8}, \frac{2x}{3}\right) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$

Mettez de l'ordre dans les équa-diff !

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Au premier ordre

1. L'équation homogène $y' + \frac{y}{x} = 0$ a pour solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\ln(x)} = \frac{C}{x}$ où $C \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante, soit $x \mapsto C(x)$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et posons $y_P\colon x \mapsto \frac{C(x)}{x}$, alors, y_P est dérivable (par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas) ainsi, pour tout $x > 0$,
$$y_P'(x) + \frac{1}{x}y_P(x) = \frac{C'(x)x - C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \times \frac{C(x)}{x} = \frac{C'(x)}{x}$$
Ainsi, y_P est une solution particulière ssi $C'\colon x \mapsto \frac{1}{x}$, prenons alors $C\colon x \mapsto \ln(x)$, on a montré que $y_P\colon x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ est une solution particulière de l'équation. Par conséquent, les solutions de l'équation différentielles sont exactement les fonctions $x \mapsto \frac{C + \ln(x)}{x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Au second ordre

On considère l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^2y'' - xy' + y = x$.

2. Comme y est solution de (E_1), y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, or $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est dérivable, par composée, g est dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t)$, comme y' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, par composée, puis par produit, g' est dérivable (donc g est deux fois dérivable) et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g''(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t\mathrm{e}^t y''(\mathrm{e}^t)$, dès lors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$g''(t) - 2g'(t) + g(t) = \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^{2t}y''(\mathrm{e}^t) - 2(\mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t)) + y(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^{2t}y''(\mathrm{e}^t) - \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) + y(\mathrm{e}^t) = \mathrm{e}^t$$
(en effet, pour $x = \mathrm{e}^t > 0$, on a $x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = x$ car y est solution de E_1 sur $\mathbb{R}_+^*$)

On note (E_2), l'équation $g'' - 2g' + g = \mathrm{e}^t$

3. Résolvons l'équation homogène $g'' - 2g' + g = 0$, son équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ a pour racine double $r = 1$, ainsi les solutions de l'équation homogène sont exactement les fonctions $x \mapsto (C_1x + C_2)\mathrm{e}^x$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_P\colon x \mapsto Bx^2\mathrm{e}^x$. Alors, $y_P'\colon x \mapsto Bx^2\mathrm{e}^x + 2xB\mathrm{e}^x$ et $y_P''\colon x \mapsto Bx^2\mathrm{e}^x + 4xB\mathrm{e}^x + 2B\mathrm{e}^x$, ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$y_P''(x) - 2y_P'(x) + y_P(x) = Bx^2\mathrm{e}^x + 4xB\mathrm{e}^x + 2B\mathrm{e}^x - 2(Bx^2\mathrm{e}^x + 2xB\mathrm{e}^x) + Bx^2\mathrm{e}^x = 2B\mathrm{e}^x$$
Prenons $B = \frac{1}{2}$, ainsi, $y_P\colon x \mapsto \frac{x^2\mathrm{e}^x}{2}$ est une solution particulière de l'équation (E_2). Ainsi, les solutions de (E_2) sont exactement les fonctions $x \mapsto \left(\frac{x^2}{2} + C_1x + C_2\right)\mathrm{e}^x$ où $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).

Application des équations différentielles à une équation fonctionnelle

On note S l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}^*$ vérifiant
$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \qquad f(xx') = xf(x') + x'f(x)$$

5. • Pour $x = x' = 0$, il vient $f(0) = 0f(0) + 0f(0)$ soit $f(0) = 0$,

- Pour $x = x' = 1$, il vient $f(1) = f(1) + f(1)$ soit $f(1) = 0$,
- Pour $x = x' = -1$, il vient $f(1) = -f(-1) - f(-1)$, soit $-2f(-1) = f(1) = 0$ donc $f(-1) = 0$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $x' = -1$, ainsi, $f(-x) = xf'(-1) + (-1)f(x)$. Comme $f'(-1) = 0$, il vient, $f(-x) = -f(x)$, ainsi f est impaire.
7. Fixons $x' > 0$ et dérivons l'équation (par rapport à x), on obtient, pour tout $x > 0$: $x'f'(xx') = f(x') + x'f'(x)$. En prenant $x = 1$, il vient $x'f(x') = f(x') + x'k$ avec $k = f'(1)$. Les lettres étant muettes, on a donc montré que pour tout $x > 0$, $xf'(x) = f(x) + kx$, ainsi, f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation, $xf' - f = kx$.
8. En déduire l'expression de $f \in S$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$. En divisant par $x > 0$, on obtient que f est solution de l'équation différentielle, $y' - \frac{1}{x}f = k$. Les solutions de l'équation homogène $y' - \frac{1}{x}y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C\mathrm{e}^{\ln(x)} = Cx$ où $C \in \mathbb{R}$. Cherchons une solution particulière grâce à la variation de la constante. Prenons, C une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $y_P \colon x \mapsto C(x)x$, alors pour tout $x > 0$, $y_P'(x) - \frac{1}{x}y_P(x) = C'(x)x + C(x) - C(x) = C'(x)x$. On cherche alors C tel que $C' \colon x \mapsto \frac{k}{x}$, $C \colon x \mapsto k\ln(x)$ convient, ainsi, $y_P \colon x \mapsto k\ln(x)x$ est une solution particulière. Ainsi, l'ensemble des solutions de $y' - \frac{1}{x}y = k$ sont les fonctions $x \mapsto k\ln(x)x + Cx$ avec $C \in \mathbb{R}$. Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f \colon x \mapsto k\ln(x)x + Cx$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, $f(1) = 0$ donc, $C = 0$, ainsi, $f \colon x \mapsto k\ln(x)x$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Dès lors, $f(0) = 0$ et si $x < 0$, alors par imparité, $f(x) = -f(-x) = -k\ln(-x)(-x)$, ainsi, $f \colon x \mapsto \begin{cases} kx\ln(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
9. La question précédente, montre que si $f \in S$, alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f \colon x \mapsto \begin{cases} kx\ln(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$.
Réciproquement si $f \colon x \mapsto \begin{cases} kx\ln(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$, alors pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$:
   - Si $x = 0$ ou $x' = 0$, alors $xx' = 0$ et $f(xx') = 0$ tandis que $xf'(x) + x'f(x) = 0$
   - Si $x \neq 0$ et $x' \neq 0$, alors $xx' \neq 0$ et
$$f(xx') = kxx'\ln(|xx'|) = kxx\ln(|x| \times |x'|) = kxx'\ln(|x|) + kxx'\ln(|x'|) = x'f(x) + xf(x')$$
Ainsi, $f \in S$. Par double inclusion, $S = \left\{ x \mapsto \begin{cases} kx\ln(|x|) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} | k \in \mathbb{R} \right\}$.

Un exercice sur Möbius (ne vous perdez donc pas de l'autre côté)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s'il existe un nombre premier p tel que p^2 divise n, on pose $\mu(n) = 0$, sinon si $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ avec $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une famille de r nombres premiers deux à deux distincts, on pose $\mu(n) = (-1)^r$.

1. $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$, $\mu(7) = -1$, $\mu(8) = 0$, $\mu(9) = 0$ et $\mu(10) = 1$
2. Comme $\mu(2) = \mu(3) = -1$, -1 au moins deux antécédents, ainsi μ n'est pas injective. En revanche, comme $\mu(2) = -1$, $\mu(4) = 0$ et $\mu(6) = 1$, tout élément de l'ensemble d'arrivée de μ admet au moins un antécédent, ainsi, μ est surjective.
3. S'il existe p un nombre premier tel que p^2 divise m ou n, alors $\mu(m) = 0$ ou $\mu(n) = 0$ donc $\mu(m)\mu(n) = 0$. De plus, p^2 divise alors mn donc $\mu(mn) = 0$, l'égalité est donc vérifié dans ce cas là. Si m et n ne sont jamais divisés par le carré d'un nombre premier, alors $m = p_1p_2 \dots p_r$ et $n = q_1q_2 \dots q_s$ avec p_i et q_j des nombres premiers deux à deux distincts (car le PGCD de m et de n vaut 1), alors $mn = p_1p_2 \dots p_rq_1q_2 \dots q_s$. Et comme $p_i \neq q_j$, il n'existe pas un nombre premier p tel que p^2 divise mn, ainsi, $\mu(mn) = (-1)^{r+s} = (-1)^r(-1)^s = \mu(m)\mu(n)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$, la somme portant sur tous les diviseurs positifs de n. Par exemple, $S(6) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(6)$.

4. $S(1) = \mu(1) = 1$

5. D'après la caractérisation de la divisibilité par la décomposition en facteurs premiers, les diviseurs positifs de p^r sont exactement les nombres p^k où $k \in [\![0\,; r+1]\!]$, ainsi, $S(p^r) = \sum\limits_{k=0}^{r} \mu(p^k)$. Or, si $k \geqslant 2$, alors $p^k = p^2 p^{k-2}$ est divisible par p^2, ainsi, $\mu(p^k) = 0$, dès lors,
$$S(p^r) = \mu(p^0) + \mu(p^1) = \mu(1) + \mu(p) = 1 + (-1) = 0$$
6. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\mathrm{PGCD}(m, n) = 1$, montrer que $S(mn) = S(m)S(n)$.
7. Soit un entier $n \geqslant 2$, alors $n = \prod\limits_{i=1}^{r} {p_i}^{\alpha_i}$ avec p_i des nombres premiers deux à deux différents et α_i des entiers naturels non nuls, remarquons que ${p_r}^{\alpha_r}$ est premier avec $\prod\limits_{i=1}^{r-1} {p_i}^{\alpha_i}$, ainsi, en utilisant la question précédente, $S(n) = S({p_i}^{\alpha_i}) S\left(\prod\limits_{i=1}^{r-1} {p_i}^{\alpha_i}\right) = 0$, car $S({p_i}^{\alpha_i}) = 0$ (d'après la question 5). Ainsi, si $n \geqslant 2$, $S(n) = 0$.
8. Soit $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ une fonction, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$. Montrer alors que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$