DS3

23 Novembre 2024

La calculatrice est interdite. L'usage de tout document est interdit. La rigueur, le soin, la présentation seront fortement pris en compte dans la notation. Les résultats de chaque question seront encadrés. Vous pouvez faire les exercices dans l'ordre qui vous plaît, mais veuillez bien indiquer le numéro de l'exercice.

Nagez dans la baie de la Somme !

Soit un entier n supérieur ou égal à 2.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison 2 telle que $u_4 = 8$. Calculer $\sum\limits_{k=2}^{n} u_k$.
2. Calculer $\sum\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \right)$
3. Rappeler la formule du binôme de Newton (on introduira tous les objets utiléss).
4. Calculer $\sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k-1} 3^{k+1}$
5. Calculer $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} 2^{j-i}$.

Arccos, ce sale gosse !

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1-x^2}{1+x^2} \in [-1\,;1]$.
2. On pose, $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$, donner l'ensemble de définition de f.
3. Déterminer sur quel ensemble f est dérivable puis déterminer f'.
4. En déduire une expression simple de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

1-T-Célèbre coupe

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x)\sin(x)^2 \,\mathrm{d}x$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\sin(x) \,\mathrm{d}x$.
3. À l'aide des formules d'Euler, linéariser $\cos(a)\cos(b)$ pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
4. Déduire de la question précédente, la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt) \,\mathrm{d}t$ pour $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.
5. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} + 11\mathrm{e}^x + 18}$.
6. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$.

Appliquez-vous pour résoudre ce système

Pour $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on pose $f(x,y,z) = (x+2y+2z, 4x+8y+2z, -3x+2y+3z) \in \mathbb{R}^3$, ainsi, $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

1. Résoudre le système linéaire $\left\{\begin{array}{cccc} x & +2y & +2z & = 11 \\ 4x & +8y & +2z & = 26 \\ -3x & +2y & +3z & = 10 \end{array}\right.$
2. Déduire de la question précédente les éventuels antécédents de $(11, 26, 10)$ par la fonction f.
3. Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}.
4. Déterminer $f(A)$ avec $A = \{(x,0,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$
5. Toujours avec l'ensemble A défini à la question précédente. Déterminer $f^{-1}(A)$.

Mettez de l'ordre dans les équa-diff !

Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Au premier ordre

1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x^2}$.

Au second ordre

On considère l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}_+^*$, $x^2y'' - xy' + y = x$. On remarque que (E_1) n'est pas une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. On ne peut donc pas la résoudre directement avec les outils du cours.

2. Soit y une solution de (E_1), on pose $g\colon t \mapsto y(\mathrm{e}^t)$. Montrer que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g''(t) - 2g'(t) + g(t) = \mathrm{e}^t$.

On note (E_2), l'équation $g'' - 2g' + g = \mathrm{e}^t$

3. Résoudre (E_2).
4. En déduire l'ensemble des solutions de (E_1).

Application des équations différentielles à une équation fonctionnelle

On note S l'ensemble des fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables sur $\mathbb{R}^*$ vérifiant

$$\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2 \qquad f(xx') = xf(x') + x'f(x)$$

5. Soit $f \in S$, calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
6. Montrer que si $f \in S$, alors f est impaire.
7. Montrer que si $f \in S$, alors f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $xf' - f = kx$ où $k = f'(1)$.
8. En déduire l'expression de $f \in S$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$.
9. Conclure en explicitant l'ensemble S.

Un exercice sur Möbius (ne vous perdez donc pas de l'autre côté)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s'il existe un nombre premier p tel que p^2 divise n, on pose $\mu(n) = 0$, sinon si $n = \prod_{i=1}^{r} p_i$ avec $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant r}$ une famille de r nombres premiers deux à deux distincts, on pose $\mu(n) = (-1)^r$.

1. Sans justifier, donner la valeur de $\mu(k)$ pour tout $k \in [\![1 ; 10]\!]$.
2. La fonction $\mu\colon \mathbb{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ est-elle injective ? surjective ?
3. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\mathrm{PGCD}(m, n) = 1$, montrer que $\mu(mn) = \mu(m)\mu(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$, la somme portant sur tous les diviseurs positifs de n. Par exemple, $S(6) = \mu(1) + \mu(2) + \mu(3) + \mu(6)$.

4. Calculer $S(1)$.
5. Calculer $S(p^r)$ pour p un nombre premier et $r \in \mathbb{N}^*$.
6. Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $\mathrm{PGCD}(m, n) = 1$, montrer que $S(mn) = S(m)S(n)$.
7. En déduire, la valeur de $S(n)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
8. Soit $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ une fonction, on pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Montrer alors que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$