

Wallis in wonderland

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$.

1. Pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(t) = \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^2 = \frac{e^{i2t} + 2 + e^{-i2t}}{4} = \frac{2 \cos(2t) + 2}{4} = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$$

$$\begin{aligned} \cos^3(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^3 = \frac{e^{i3t} + 3e^{i2t}e^{-it} + 3e^{it}e^{-i2t} + e^{-i3t}}{8} \\ &= \frac{2 \cos(3t) + 6 \cos(t)}{8} = \frac{\cos(3t) + 3 \cos(t)}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^4(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^4 = \frac{e^{i4t} + 4e^{i3t}e^{-it} + 6e^{i2t}e^{-i2t} + 4e^{it}e^{-i3t} + e^{-i4t}}{16} \\ &= \frac{2 \cos(4t) + 6 + 8 \cos(2t)}{16} = \frac{\cos(4t) + 3 + 4 \cos(2t)}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^5(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^5 = \frac{e^{i5t} + 5e^{i4t}e^{-it} + 10e^{i3t}e^{-i2t} + 10e^{i2t}e^{-i3t} + 5e^{it}e^{-i4t} + e^{-i5t}}{32} \\ &= \frac{\cos(5t) + 5 \cos(3t) + 10 \cos(t)}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^6(t) &= \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^6 = \frac{e^{i6t} + 6e^{i5t}e^{-it} + 15e^{i4t}e^{-i2t} + 20 + 15e^{i2t}e^{-i4t} + 5e^{it}e^{-i5t} + e^{-i6t}}{64} \\ &= \frac{\cos(6t) + 6 \cos(4t) + 15 \cos(2t) + 10}{32} \end{aligned}$$

2. • $W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$

• $W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1(t) dt = [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

• $W_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

• $W_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(3t) + 3 \cos(t)}{4} dt = \left[\frac{\sin(3t)}{12} + \frac{3 \sin(t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{12} + \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

• $W_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(4t) + 3 + 4 \cos(2t)}{8} dt = \left[\frac{\sin(4t)}{32} + \frac{3t}{8} + \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi}{16}$

3. Posons $x = \frac{\pi}{2} - t$, alors $dx = -dt$. Ainsi,

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n\left(x - \frac{\pi}{2}\right) (-dx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos(t) \leq 1$, en multipliant par $\cos^n(t) \geq 0$, $\cos^{n+1}(t) \leq \cos^n(t)$.

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $W_{n+1} \leq W_n$. Ainsi, la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

5. Comme ce qui précède, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t) \geq 0$, ainsi, $\cos^n(t) \geq 0$, par positivité de l'intégrale, $W_n \geq 0$. Ainsi, la suite $(W_n)_n$ est une suite décroissante et minorée (par 0) donc d'après le théorème de la convergence monotone, $(W_n)_n$ converge.

6. Posons $u: t \mapsto \cos^{n+1}(t)$ et $v: t \mapsto \sin(t)$. Remarquons que $(u, v) \in \mathcal{C}^1([0; \pi/2], \mathbb{R})^2$. De plus, $u': t \mapsto (n+1) \cos^n(t) \sin(t)$ et $v': t \mapsto \cos(t)$. Ainsi par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{u(t)} \times \underbrace{\cos(t)}_{v'(t)} dt = \left[\underbrace{\cos^{n+1}(t)}_{u(t)} \underbrace{\sin(t)}_{v(t)} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{-(n+1)\cos^n(t)\sin(t)}_{u'(t)} \times \underbrace{\sin(t)}_{v'(t)} dt \\
&= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) \sin^2(t) dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) (1 - \cos^2(t)) dt \\
&= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) - \cos^{n+2}(t) dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) dt \\
&= (n+1)(W_n - W_{n+2})
\end{aligned}$$

Donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$, ainsi $W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$.

7. Posons l'hypothèse de récurrence : $\mathcal{P}(p)$: « $W_{2p} > 0$ et $W_{2p+1} > 0$ ». Comme $W_0 > 0$ et $W_1 > 0$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie. Alors $W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2}W_{2p} > 0$ (par produit de nombres strictement positifs), et $W_{2(p+1)+1} = W_{2p+3} = \frac{2p+2}{2p+3}W_{2p+1} > 0$ (également par produit de nombre strictement positifs). On en déduit que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Ainsi, par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $W_{2p} > 0$ et $W_{2p+1} > 0$. Comme un entier naturel est soit pair soit impair, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \neq 0$.
8. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors d'après la question 6,

$$(n+2)W_{n+2}W_{n+1} = [(n+2)W_{n+2}]W_{n+1} = [(n+1)W_n]W_{n+1}$$

Ceci montre que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante. Pour $n=0$, on obtient que la constante vaut $1W_1W_0 = \pi/2$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)W_{n+1}W_n = \pi/2$.

9. (a) $\prod_{k=1}^p k = p!$
(b) $\prod_{k=1}^p (2k) = 2^p \prod_{k=1}^p k = 2^p p!$
(c) $\prod_{k=0}^p (2k+1) = \frac{\prod_{k=0}^p (2k+1) \prod_{k=1}^p (2k)}{\prod_{k=1}^p (2k)} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!}$

10. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors en utilisant la question 6, avec $n = 2p - 2$, on obtient

$$W_{2p} = W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n = \frac{2p-1}{2p}W_{2p-2}$$

En utilisant la question 6 avec $n = 2p - 4$, on obtient $W_{2p-2} = W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n = \frac{2p-3}{2p-2}W_{2p-4}$.

Ainsi,

$$W_{2p} = \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times W_{2p-4}$$

En continuant ainsi, de proche en proche, on obtient :

$$\begin{aligned}
W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} \times \frac{2p-3}{2p-2} \times \frac{2p-5}{2p-4} \times \dots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times W_0 \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1)}{\prod_{k=1}^p (2k)} W_0 = \frac{\prod_{k=0}^{p-1} (2k+1) \prod_{k=1}^p (2k)}{\left(\prod_{k=1}^p (2k)\right)^2} W_0 = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} W_0 = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \times \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

De même :

$$W_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} \times W_{2p-1} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} W_{2p-3} = \frac{2p}{2p+1} \times \frac{2p-2}{2p-1} \times \dots \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times W_1$$

$$W_{2p+1} = \frac{\prod_{k=1}^p (2k)}{\prod_{k=1}^p (2k+1)} W_1 = \frac{\left(\prod_{k=1}^p (2k)\right)^2}{\prod_{k=1}^p (2k+1) \prod_{k=1}^p (2k)} W_1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

11. Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(p) : \ll W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \gg$. Pour $p = 0$, $\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = W_0 = W_{2 \times 0}$ et Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(p)$ vérifiée, alors, en utilisant la question 6, on obtient

$$W_{2(p+1)} = W_{2p+2} = \frac{2p+1}{2p+2} W_{2p} = \frac{2p+1}{2p+2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2p+2)(2p+1)(2p)!}{2(p+1)2(p+1)2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2p+2)!}{2^{2(p+1)}((p+1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$. De plus, d'après la question 6, $(2p+1)W_{2p+1}W_{2p} = \frac{\pi}{2}$. En divisant par W_{2p} et grâce à l'expression de W_{2p} , on obtient $W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $(W_n)_n$ est décroissante, $W_{n+1} \leq W_n$, en divisant par W_n qui est strictement positif, on obtient $\frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$. De plus, encore une fois par décroissance de $(W_n)_n$:

$$\frac{(n+1)}{(n+2)} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n}$$

On en déduit les inégalités demandés.

13. Comme $\frac{n+1}{n+2} \sim \frac{n}{n} = 1$, on en déduit que $\frac{n+1}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$, par théorème d'encadrement, $\frac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Ainsi, $W_{n+1} \sim W_n$.

14. On sait que $(n+1)W_{n+1}W_n \sim \pi/2$, en divisant par $n+1$, on obtient : $W_n W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \sim \frac{\pi}{2n}$.

De surcroît, $W_{n+1} \sim W_n$, on obtient $W_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$. Or, les équivalences sont conservées par passage à l'exposant :

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Comme $\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et que deux suites équivalentes ont même limite, on en déduit que $W_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

15. Ainsi, $p! \sim C\sqrt{p} \left(\frac{p}{e}\right)^p$, et $(2p)! \sim C\sqrt{2p} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}$, on trouve par quotient d'équivalents que

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \sim \frac{C\sqrt{2p} \left(\frac{2p}{e}\right)^{2p}}{2^{2p} \left(C\sqrt{p} \left(\frac{p}{e}\right)^p\right)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{C\sqrt{2p}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4p}}$$

Ainsi, par division, $\frac{\pi\sqrt{4p}}{C\sqrt{2p}\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{C} \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 1$ Comme $\frac{\sqrt{2\pi}}{C}$ est une constante qui tend vers 1, on a que $\frac{\sqrt{2\pi}}{C} = 1$, soit $C = \sqrt{2\pi}$. Par conséquent, la formule de Stirling est

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Remarque 1. On constate donc que dans un équivalent de $n!$ se trouvent deux constantes π et e qui semblaient pourtant très éloignés du produit de n entiers consécutifs.

16. Par produit et quotients d'équivalents :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)^2} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$