

# Les Indispensables en PCSI

Loïc Devilliers

20 mars 2025

Dans ce document, je vais lister chapitre par chapitre les éléments qui me paraissent indispensables. Ainsi, certains items ne sont pas dans cette liste mais sont quand même importants, ici je me contente de lister le minimum du minimum pour couvrir les lacunes. Je met aussi un lien vers une vidéo Youtube quand j'ai une vidéo qui donne un exemple de la notion.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Logique</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Études des fonctions et fonctions usuelles</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Nombres complexes</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Intégrales et équations différentielles</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>Ensembles et applications</b>	<b>3</b>
<b>6</b>	<b>Sommes, produits, systèmes linéaires, arithmétique</b>	<b>3</b>
<b>7</b>	<b>Nombres réels et suites numériques</b>	<b>3</b>
<b>8</b>	<b>Calcul matriciel</b>	<b>4</b>
<b>9</b>	<b>Polynômes</b>	<b>4</b>
<b>10</b>	<b>Limites et continuité</b>	<b>4</b>
<b>11</b>	<b>Dérivabilité</b>	<b>5</b>
<b>12</b>	<b>Espaces vectoriels</b>	<b>5</b>
<b>13</b>	<b>Espaces vectoriels de dimension finie</b>	<b>6</b>
<b>14</b>	<b>Chapitre 14 : Analyse asymptotique</b>	<b>6</b>
<b>15</b>	<b>Les grands classiques de concours</b>	<b>6</b>

## 1 Logique

- Connaître la méthode pour montrer une proposition avec un  $\forall$  ou un  $\exists$  et connaître la négation.
- Pour une implication, savoir ce qu'est la contraposée, la réciproque, la négation d'une implication (qui ne contient pas d'implication).
- Savoir ce qu'est une récurrence simple/double/forte mais surtout réfléchir à la pertinence d'utiliser l'une ou l'autre <https://youtube.com/shorts/SaBaS8g7M4k>
- Comprendre les analyses-synthèses <https://youtube.com/shorts/0t9QNqrze0k>

## 2 Études des fonctions et fonctions usuelles

- Définition de l'image d'une fonction [https://youtube.com/shorts/DYnlxp2Ae\\_g](https://youtube.com/shorts/DYnlxp2Ae_g)
- Définition d'une bijection, de la bijection réciproque, connaître le théorème de la bijection strictement monotone <https://youtube.com/shorts/14c1GWyxm04>  
<https://youtube.com/shorts/r0GM-KPKK-I> [https://youtube.com/shorts/RWIhwLa\\_RHM](https://youtube.com/shorts/RWIhwLa_RHM)
- Définition de la dérivabilité d'une fonction ainsi que du nombre dérivé et l'équation de la tangente dans le cas d'une fonction dérivable [https://youtube.com/shorts/zpEd\\_S8VVJk](https://youtube.com/shorts/zpEd_S8VVJk)  
<https://youtube.com/shorts/ARY4GUUnR0A>
- Comprendre les ensembles de départ et d'arrivée dans le cas de la composition.
- Connaître par cœur les formules de dérivation d'une somme/produit/quotient/composée <https://youtube.com/shorts/7gN7xQMhz-o>
- Connaître le théorème montrant qu'une fonction dérivable est constante/croissante/strictement croissante. <https://youtube.com/shorts/T41sbYx3yW4> <https://youtube.com/shorts/OZc4QVhvkF8>  
<https://youtube.com/shorts/Xy5aE5qez7s> <https://youtube.com/shorts/Z4I7MkCnoJk>
- Connaître les ensembles de définitions et de dérivabilité des fonctions usuelles ainsi que leurs dérivées. <https://youtube.com/shorts/Xy5aE5qez7s>
- Connaître les formules de  $\cos(a+b)$  et  $\sin(a+b)$ , ainsi que la relation entre  $\cos^2$  et  $\sin^2$ . Connaître aussi celle entre  $\operatorname{ch}^2$  et  $\operatorname{sh}^2$ .

## 3 Nombres complexes

- Connaître les inégalités triangulaires et le cas d'égalité, connaître les formules de l'exponentielle complexe  $e^{i\theta}$ , les formules de Moivre, Euler, la technique de l'angle moitié
- Linéariser  $\sin^4(x)/\cos^4(x)/\sin^3(x)/\cos^3(x)$  <https://youtube.com/shorts/gDJjuUfosjQ>
- Exprimer  $\cos(4x)/\sin(4x)/\cos(3x)/\sin(3x)$  en fonction de  $\cos(x)/\sin(x)$  <https://youtube.com/shorts/uZ16BimFfxI>
- Trouver sous forme algébrique les racines carrées d'un complexe [https://youtube.com/shorts/4J\\_\\_mnqjmJE](https://youtube.com/shorts/4J__mnqjmJE)
- Savoir résoudre les équations du second degré à coefficients complexes
- Connaître **parfaitement** la forme des racines  $n$ -ièmes de l'unité.

## 4 Intégrales et équations différentielles

- Propriétés de l'intégrale : linéarité de l'intégrale, positivité, croissance, Chasles
- Théorème fondamental de l'analyse, calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive
- Primitives usuelles dont  $\frac{u'}{u}$ ,  $\frac{u'}{u^2}$ ,  $u'u^\alpha$ ,  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ , <https://youtube.com/shorts/1Y0s572RmT0>
- Connaître la méthode pour déterminer des primitives de  $x \mapsto \frac{1}{ax^2+bx+c}$   
<https://youtube.com/shorts/3lL5D2rnTS4> <https://youtube.com/shorts/W2r1-cYD-AM>
- IPP <https://youtube.com/shorts/bEEkrP3TWhM>

- Changement de variable (pas la peine d'apprendre la formule théorique, mais savoir faire un changement de variable dans la pratique) <https://youtube.com/shorts/4SAIevughC4> <https://youtube.com/shorts/cMeBM2qBaBw>
- Résolution des équations d'ordre 1 homogène
- Variation de la constante <https://youtube.com/shorts/lggTvet-m1M>
- Résolution des équations d'ordre 2 homogène à coefficients constants.

**Remarque 1.** Je n'ai pas mis la résolution d'équations différentielles du second ordre avec un second membre en exponentielle cosinus ou polynôme car j'ai l'impression que cela tombe peu.

## 5 Ensembles et applications

- Connaître les méthodes d'écrire un ensemble <https://youtube.com/shorts/WU-jAHIk1w8>
- Connaître la méthode pour montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles <https://youtube.com/shorts/etJVRMtVVB4>
- Opérations sur les ensembles, définition de  $\mathcal{P}(E)$ ,
- Fonctions, notation  $F^E = \mathcal{F}(E, F)$ , savoir ce que veut dire que deux fonctions sont égales
- Image et image réciproque d'une fonction (il faut connaître la définition, avoir le schéma en tête et avoir une idée de ce que cela veut dire avec des mots en français) [https://youtube.com/shorts/fF8P8Q\\_op3s](https://youtube.com/shorts/fF8P8Q_op3s) <https://youtube.com/shorts/zDF1tt0cCcl>
- Composition de fonctions (toujours réfléchir aux ensembles de départ et d'arrivée),
- Définition d'une fonction injective, surjective, bijective, et de la bijection réciproque (il faut connaître la définition, avoir le schéma en tête et avoir une idée de ce que cela veut dire avec des mots en français) <https://youtube.com/shorts/LAavlqjHJN8>

## 6 Sommes, produits, systèmes linéaires, arithmétique

- Manipulation d'une somme : changement d'indice, découpage d'une somme, linéarité de la somme, somme télescopique
- Somme des termes d'une suite arithmétique/géométrique
- Sommes doubles, savoir écrire une somme double sur un rectangle ou un triangle comme une somme où le premier indice est  $i$  et le second  $j$  ou l'inverse <https://youtube.com/shorts/PvLBfoi1tcg>
- Binôme de Newton, savoir calculer une somme en reconnaissant le binôme [https://youtube.com/shorts/nHQT\\_TWi2K8](https://youtube.com/shorts/nHQT_TWi2K8)
- Connaître la méthode pour calculer  $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$  (ou sinus) [https://youtube.com/shorts/H1ci5GpXu\\_c](https://youtube.com/shorts/H1ci5GpXu_c)
- Savoir résoudre un système linéaire

## 7 Nombres réels et suites numériques

- Connaître la définition du maximum/d'un majorant/de la borne supérieure ainsi que le lien entre ces objets ainsi que le théorème de la borne supérieure <https://www.youtube.com/watch?v=ZWvB8sE8CQs>
- Définition de la partie entière et encadrement de  $x$  en fonction de la partie entière de  $x$  ou l'inverse.
- Connaître l'expression d'une suite arithmétique/géométrique/linéaire d'ordre 2 <https://youtube.com/shorts/uqF5mkAtG5c> <https://youtube.com/shorts/d81eYJG3Vgk>
- Connaître la méthode pour trouver l'expression d'une suite arithmético-géométrique <https://youtube.com/shorts/h-fMI52fgL0>
- Définition de la limite avec les quantificateurs
- Unicité de la limite, une suite convergente est bornée, les inégalités larges sont conservées à la limite, théorème d'encadrement, de comparaison, théorème de la limite monotone

- Suites récurrentes, savoir que si  $f: I \rightarrow I$  est croissante et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $(u_n)_n$  est monotone et savoir déterminer si elle est croissante ou décroissante en comparant  $u_0$  et  $u_1$ . **Warning** : Si  $(u_n)_n$  est une suite quelconque, comparer  $u_0$  à  $u_1$  ne permet pas de savoir si la suite est monotone. et savoir que si  $(u_n)_n$  converge vers  $\ell \in I$  et que  $f$  est continue en  $\ell$  alors  $f(\ell) = \ell$ .  
<https://youtube.com/shorts/IZBDqym0XEw>
- Suites extraites, connaître le théorème des suites extraites et savoir l'utiliser pour montrer qu'une suite n'a pas de limite <https://youtube.com/shorts/964xf2ZESJO>
- Limite d'une suite géométrique en fonction de la raison

## 8 Calcul matriciel

- Produit matriciel, **savoir parfaitement** quand il est défini, la taille de la matrice produit ainsi que l'expression des coefficients. <https://youtube.com/shorts/tDuq10L38mA?feature=share>
- Savoir tout ce qui est faux avec le produit matriciel
- Savoir calculer les puissances d'une matrice en raisonnant par récurrence :  
<https://youtube.com/shorts/I0zyCuub9ZU?feature=share>
- Binôme de Newton pour les matrices (savoir à tout prix qu'il faut vérifier la commutativité)  
<https://www.youtube.com/shorts/yz5dMcQ5yb4>
- Savoir inverser une matrice (connaître la formule dans le cas des matrices de taille  $(2, 2)$ , système linéaires/opérations sur les lignes dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $n \geq 3$ )  
<https://www.youtube.com/shorts/0p0JidJLLb8>  
<https://youtube.com/shorts/J4Ikgh-h4Ng?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/tDuq10L38mA?feature=share>
- Savoir calculer les puissances d'une matrice  $A$  si  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  inversible et  $D$  diagonale :  
<https://youtube.com/shorts/E2xwM03J5VA?feature=share>

## 9 Polynômes

- Pseudo-définition d'un polynôme, définition du degré, du coefficient dominant, formules sur le degré de la somme le produit et la composition de polynômes.
- Division euclidienne : savoir effectuer la division en posant façon école primaire ou savoir trouver le reste en utilisant les racines du diviseur, savoir qu'il faut dériver la division euclidienne autant de fois que la multiplicité de la racine. <https://youtube.com/shorts/kxx5JQdEoEQ?feature=share>
- Connaître la définition de la multiplicité ainsi que les caractérisation dont celles avec la dérivée
- Savoir factoriser un polynôme dans  $\mathbb{C}[X]$  ou  $\mathbb{R}[X]$  par rapport à ses racines :  
<https://youtube.com/shorts/sYmmLdHUv8k?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/j2fmF3Nml9s?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/V5k7aymZULQ?feature=share>
- Savoir effectuer la décomposition en éléments simples lorsque le dénominateur est scindé à racines simples : ne pas oublier de faire la division euclidienne si le numérateur a un degré supérieure ou égale à celui du dénominateur : [https://youtube.com/shorts/F4TAddjV\\_0?feature=share](https://youtube.com/shorts/F4TAddjV_0?feature=share)

## 10 Limites et continuité

- Connaître la définition des limites avec les quantificateurs et savoir déterminer les limites dans des cas simples : <https://youtube.com/shorts/WE918odlSiE?feature=share>
- Caractérisation séquentielle de la limite, savoir l'utiliser pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite en un point donné : <https://youtube.com/shorts/6JYUVZe6F-A?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/SCRliBW0ovQ?feature=share>
- Connaître le critère pour savoir si une fonction est prolongeable par continuité et savoir donner son prolongement par continuité. Connaître la différence entre une fonction continue en  $a$  et prolongeable

- par continuité en  $a$  : <https://youtube.com/shorts/x0GksIVlzFE?feature=share>
- Connaître **parfaitement** le théorème des valeurs intermédiaires et s'avoir l'appliquer, savoir aussi programmer la dichotomie sur un exemple : <https://youtube.com/shorts/kxDKOMMYjgY?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/KU08CkkoIak?feature=share>
  - Connaître **parfaitement** le théorème des bornes atteintes <https://youtube.com/shorts/d4F4PNcbiQc?feature=share>
  - Savoir gérer les suites implicites, savoir utiliser le TVI pour démontrer l'existence et l'unicité de l'unique  $x_n$  qui vérifie une équation qui dépend de  $n$ , savoir utiliser les inégalités sur  $f_n(x_{n+1})$  ou  $f_{n+1}(x_n)$  pour déterminer la monotonie de  $(x_n)_n$  pour en déduire la convergence. Bien savoir faire la différence entre suites définies implicitement et suites récurrentes, en particulier, quand on a une suite implicite, il n'y a pas de théorème de point fixe. <https://youtube.com/shorts/FU3fSsZKSiw?feature=share>.

## 11 Dérivabilité

- Connaître la définition de la dérivabilité et l'équation de la tangente d'une fonction dérivable, opérations sur les fonctions dérivables (combinaison linéaire, produit, composée, bijection réciproque)
- Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis, inégalités des accroissements finis (application aux suites récurrentes), théorème de la limite de la dérivée  
<https://youtube.com/shorts/kSXv0ietgwA?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/efpy0cXSBs8?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/tyCALAvpBwI?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/eaRS87cmfL8?feature=share> (le principe de l'algorithme à  $\varepsilon$  près est à connaître)
- Dérivées successives, fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ , formule de Leibniz :  
<https://youtube.com/shorts/EzdmF4RS3hs?feature=share>

## 12 Espaces vectoriels

- Connaître les espaces vectoriels de référence :  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{F}(\Omega, E)$  (ou  $\Omega$  est un ensemble quelconque, et  $E$  un espace vectoriel). Comprendre la différence entre un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. Savoir démontrer qu'une partie est un sous-espace vectoriel <https://youtu.be/M8Jpf6bvw-Y>
- Connaître **parfaitement** la définition de  $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$  et savoir c'est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Savoir s'en servir pour montrer que des parties sont des SEV :  
<https://youtube.com/shorts/KGICI5X5pwI?feature=share>
- Connaître **parfaitement** la définition de  $F + G$ , savoir ce que veut dire que la somme est directe et comment montrer qu'elle l'est avec l'intersection, connaître la définition de supplémentaires et ne pas confondre ces notions. Savoir démontrer que deux SEV sont supplémentaires par analyse-synthèse :  
<https://youtube.com/shorts/K6RkaLJNKjc?feature=share>      <https://youtu.be/NAaCvM-DUHE>  
(ces exemples n'ont rien de particulier, c'est la démarche qui faut bien comprendre et savoir réappliquer dans d'autres exemples)
- Famille libre : connaître **parfaitement** la définition, et connaître les différents petits critères qui permettent de montrer qu'une famille est libre ou liée (présence du vecteur nul, cas d'une famille à un vecteurs ou deux vecteurs, cas des polynômes non nuls et dont les degrés sont deux à deux distincts)  
<https://youtube.com/shorts/B51EpdUXzWU?feature=share>
- Famille génératrice
- Bases : connaître les bases canoniques de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ , ainsi que celle de  $\mathbb{C}$  (vu comme un  $\mathbb{R}$ -EV ou un  $\mathbb{C}$ -EV). Savoir que compter le nombre de vecteurs dans une base permet de déterminer la dimension de l'espace vectoriel en question. Savoir déterminer une base d'un SEV définie par une ou plusieurs équations :  
<https://youtube.com/shorts/BZpvN4H7h18?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/UK0dlhMrDH8?feature=share>

## 13 Espaces vectoriels de dimension finie

- Savoir utiliser la dimension pour montrer qu'une famille est une base :  
<https://youtube.com/shorts/AyUmJIPcEtA?feature=share>  
[https://youtube.com/shorts/44\\_aaJ8BvHE?feature=share](https://youtube.com/shorts/44_aaJ8BvHE?feature=share)
- Connaître les dimensions de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ , ainsi que celle de  $\mathbb{C}$  (vu comme un  $\mathbb{R}$ -EV ou un  $\mathbb{C}$ -EV), en particulier ne pas se tromper sur  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- Savoir utiliser la dimension pour montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires :  
<https://youtube.com/shorts/tbov3Sq3mRw?feature=share>
- Savoir déterminer la dimension d'espaces vectoriels définies par équations, comme un vect, comme une somme ou une intersection quitte à utiliser la formule de Grassmann :  
<https://youtube.com/shorts/nvrV5emuhDE?feature=share>
- Rang : savoir calculer le rang d'une famille : on enlève les vecteurs tant qu'ils sont combinaisons linéaires des autres, puis une fois qu'on obtient une famille libre, il suffit de le justifier et de compter son nombre de vecteurs : <https://youtube.com/shorts/ifQYQZcN-sk?feature=share>
- Savoir déterminer la dimension de l'espace vectoriel de l'ensemble des matrices triangulaires supérieures ou symétriques ou antisymétriques (chaudement recommandé si vous êtes dans la première moitié de la classe en maths, sinon c'est moins indispensable) :  
<https://youtu.be/zWRQ1lyYLsk> <https://youtu.be/-1x001EgYPI>

## 14 Chapitre 14 : Analyse asymptotique

- Connaître **parfaitement** les développements limités en 0 de  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\text{ch}$ ,  $\sin$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ ,  $\frac{1}{1-x}$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$ ,  $x \mapsto \ln(1-x)$  (les fonctions paires à l'ordre  $2n$ , les fonctions impaires à l'ordre  $2n+1$ ). Il faut savoir les donner à l'aide du symbole  $\sum$  mais aussi savoir les donner en extension dans le cas des «petits» ordres. Le  $DL_3(0)$  de  $\tan$  doit être connu.
- Opérations sur les DL : somme, produit et composée (bien appliquer la méthode) :  
<https://youtube.com/shorts/nAHGY2A9gB4?feature=share>  
[https://youtube.com/shorts/jHBkHTEY\\_PY?feature=share](https://youtube.com/shorts/jHBkHTEY_PY?feature=share)
- Savoir déterminer un DL autre qu'en 0 : <https://youtube.com/shorts/dXu64YdsYBQ?feature=share>
- Savoir utiliser les DL pour déterminer une tangente ou une asymptote et déterminer la position de la fonction par rapport à cette tangente/asymptote :  
<https://youtube.com/shorts/iHEvT8Ft6w8?feature=share>  
[https://youtube.com/shorts/hmBQ8ig\\_w8g?feature=share](https://youtube.com/shorts/hmBQ8ig_w8g?feature=share)
- Savoir utiliser les développements limités pour déterminer un équivalent ou une limite d'une fonction ou d'une suite :  
<https://youtube.com/shorts/eaCVNriTKVw?feature=share>
- $\mathcal{O}$ ,  $\mathcal{O}$ ,  $\sim$  connaître les définitions et les propriétés les plus utilisés dans les DL.

## 15 Les grands classiques de concours

- Les intégrales de Wallis  
<https://youtube.com/shorts/GNo2L66fxZI?feature=share>  
[https://youtube.com/shorts/KNHymFSMc\\_E?feature=share](https://youtube.com/shorts/KNHymFSMc_E?feature=share)  
<https://youtube.com/shorts/Qk9oebPdZNA?feature=share>
- Les polynômes de Tchebychev  
<https://youtube.com/shorts/dvLGV1sJask?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/p0dhWTQhHkK?feature=share>  
<https://youtube.com/shorts/cC4Q9FTMkKo?feature=share> (recommandé si vous êtes dans la première moitié de la classe en maths, sinon c'est moins indispensable)

- Les polynômes interpolateur de Lagrange (sera au programme de deuxième année)  
[https://youtube.com/shorts/44\\_aaJ8BvHE?feature=share](https://youtube.com/shorts/44_aaJ8BvHE?feature=share)
- Les polynômes de Legendre sont scindés à racines simples (recommandé si vous êtes dans la première moitié de la classe en maths, sinon c'est moins indispensable)  
[https://youtube.com/shorts/mge03\\_bJv1M?feature=share](https://youtube.com/shorts/mge03_bJv1M?feature=share)
- Les polynômes de Hermite (recommandé si vous êtes dans la première moitié de la classe en maths, sinon c'est moins indispensable) <https://youtube.com/shorts/1zepbZmaHCU?feature=share>