Des polynhommes et des polynfemmes (pour l'inclusivité)

1. P est de degré 6 et de coefficient dominant 2.
2. D'après les relations entre les racines et les coefficients d'un polynôme, $s = -\dfrac{-2}{2} = 1$ et $p = \dfrac{(-1)^6(-12)}{2} = -6$
3. On calcule les dérivées successives de P en i (en partant de la dérivée 0-ième) jusqu'à trouver la première dérivée non nul.

$$\begin{aligned}
P(\mathrm{i}) &= 2\mathrm{i}^6 - 2\mathrm{i}^5 - 8\mathrm{i}^4 - 4\mathrm{i}^3 - 22\mathrm{i}^2 - 2\mathrm{i} - 12\\
&= -2 - 2\mathrm{i} - 8 + 4\mathrm{i} + 22 - 2\mathrm{i} - 12 = 0\\
P' &= 12X^5 - 10X^4 - 32X^3 - 12X^2 - 44X - 2\\
P'(\mathrm{i}) &= 12i^5 - 10i^4 - 32\mathrm{i}^3 - 12\mathrm{i}^2 - 44\mathrm{i} - 2\\
&= 12\mathrm{i} - 10 + 32\mathrm{i} + 12 - 44\mathrm{i} - 2 = 0\\
P'' &= 60X^4 - 40X^3 - 96X^2 - 24X - 44\\
P''(\mathrm{i}) &= 60\mathrm{i}^4 - 40\mathrm{i}^3 - 96\mathrm{i}^2 - 24\mathrm{i} - 44\\
&= 60 + 40\mathrm{i} + 96 - 24\mathrm{i} - 44 = 16\mathrm{i} + 112 \neq 0
\end{aligned}$$

   D'après la caractérisation de la multiplicité, i est racine de P et sa multiplicité vaut 2.
4. Comme P est un polynôme à coefficients réels, $-\mathrm{i} = \bar{\mathrm{i}}$ est aussi racine de P avec la même multiplicité que celle de i, ainsi $-\mathrm{i}$ est racine double de P.
5. Notons $x_1 = x_2 = \mathrm{i}$, $x_3 = x_4 = -\mathrm{i}$ et x_5 et x_6 les autres racines complexes de P. Alors, d'après la question 2

$$\begin{aligned}
1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6\\
-6 &= x_1x_2x_3x_4x_5x_6
\end{aligned}$$

   En remplaçant x_1 et x_2 par i et x_3 et x_4 par $-\mathrm{i}$, on obtient $x_5 + x_6 = 1$ et $x_5x_6 = -6$. On cherche donc deux nombres dont la somme vaut 1 et le produit -6, 3 et -2 conviennent et ce sont les seuls. Ainsi, les racines de P sont -2, 3, i et $-\mathrm{i}$, i et $-\mathrm{i}$ sont de multiplicités 2, comme P est degré 6, -2 et 3 sont nécessairement des racines simples.
6. D'après la factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ connaissant ses racines, leur multiplicité et le coefficient dominant :

$$P = 2(X - \mathrm{i})^2(X + \mathrm{i})^2(X - 3)(X + 2)$$

   Comme les polynômes de degré 1 sont irréductibles, ceci est bien la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ (unique à l'ordre des facteurs près). De plus,

$$(X - \mathrm{i})^2(X + \mathrm{i})^2 = ((X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i}))^2 = (X^2 + 1)^2$$

   Ainsi,

$$P = 2(X^2 + 1)^2(X - 3)(X + 2)$$

   Les polynômes $X - 3$ et $X + 2$ sont aussi irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ car de degré 1 et $X^2 + 1$ aussi (car de degré 2 et à discriminant strictement négatif). Ainsi, ceci est bien la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
7. $B(1) = 0$, $B(2) = 8 - 4 - 8 + 4 = 0$ et $B(-2) = -8 - 4 + 8 + 4 = 0$, ainsi, on a trouvé trois racines distinctes de B et B est degré 3 on a donc toutes les racines de B. Ainsi, les racines de B sont 1, 2 et -2.
8. D'après le théorème de la division euclidienne, il existe un unique $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $(X - 1)^n = BQ + R$ avec $d^\circ R < d^\circ B = 3$, ainsi, $d^\circ R \leqslant 2$, donc il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $R = aX^2 + bX + c$, donc

$(X-1)^n = BQ + aX^2 + bX + c$, ainsi en remplaçant X par 1, $(1-1)^n = B(1)Q(1) + a + b + c = a + b + c$. De même $(2-1)^n = 4a + 2b + c$ et $(-3)^n = 4a - 2b + c$. On est donc amené à résoudre le système :

$$\begin{cases} a & +b & +c & = & 0 \\ 4a & +2b & +c & = & 1 \\ 4a & -2b & +c & = & (-3)^n \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 4L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\iff} \begin{cases} a & +b & +c & = & 0 \\ & -2b & -3c & = & 1 \\ & -6b & -3c & = & (-3)^n \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2}{\iff} \begin{cases} a & +b & +c & = & 0 \\ & -2b & -3c & = & 1 \\ & & 6c & = & (-3)^n - 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c & = & \dfrac{-(-3)^{n-1} - 1}{2} \\ b & = & \dfrac{-1 - 3c}{2} \\ a & = & -b - c \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c & = & \dfrac{-(-3)^{n-1} - 1}{2} \\ b & = & \dfrac{1 - (-3)^n}{4} \\ a & = & \dfrac{-(-3)^{n-1} + 1}{4} \end{cases}$$

Ainsi, le reste de la division euclidienne de $(X-1)^n$ par B est

$$R = \frac{-(-3)^{n-1} + 1}{4} X^2 + \frac{1 - (-3)^n}{4} X + \frac{-(-3)^{n-1} - 1}{2}$$

9. $d^\circ X^2 < d^\circ B = 3$ et B est scindé à racines simples, ainsi, d'après le théorème de la décomposition simples, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{1, 2, -2\}$,

$$\frac{x^2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x+2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x-2} + \frac{\gamma}{x+2}$$

   - En multipliant par $x-1$, on obtient, $\dfrac{x^2}{(x-2)(x+2)} = \alpha + \dfrac{\beta(x-1)}{x-2} + \dfrac{\gamma(x-1)}{x+2}$, ainsi, $\alpha = \dfrac{-1}{3}$
   - En multipliant par $x-2$, on obtient $\dfrac{x^2}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{\alpha(x-2)}{x-1} + \beta + \dfrac{\gamma(x-2)}{x-2}$, il vient $\beta = 1$
   - En multipliant par $x+2$, on obtient $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{\alpha(x+2)}{x-1} + \dfrac{\beta(x+2)}{x-2} + \gamma$, ainsi, $\gamma = \dfrac{1}{3}$

   Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{1, 2, -2\}$, $\dfrac{x^2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \dfrac{-1}{3} \times \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+2}$, ainsi, $x \mapsto \dfrac{\ln(x+2) - \ln(x-1)}{3} + \ln(x-2)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^2}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$ sur $]\,4\,;+\infty\,[$.

Les suites récurrentes reviennent ! (d'où leur nom)

1. Le polynôme $X^2 + X + 1$ a un discriminant strictement négatif donc ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $[\,0\,;1\,]$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour $x \in [\,0\,;1\,]$,

$$f'(x) = \frac{1 \times (x^2 + x + 1) - x(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} \geqslant 0$$

   De plus, $f'(x) = 0$ ssi $x = 1$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[\,0\,;1\,]$. Soit $x \in [\,0\,;1\,]$, alors $0 \leqslant x \leqslant 1$, par croissance de f, $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$, donc $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{3}$. Ainsi, $f([\,0\,;1\,]) \subset \left[\,0\,;\dfrac{1}{3}\,\right] \subset [\,0\,;1\,]$. Par conséquent, $[\,0\,;1\,]$ est stable par f.

2. Comme f est croissante sur $[\,0\,;1\,]$ et que $[\,0\,;1\,]$ est un intervalle stable, la suite $(u_n)_n$ est monotone, or $u_1 = f(u_0) = f(1) = \dfrac{1}{3} < u_0$, ainsi, la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

3. D'après la propriété de l'intervalle stable, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\,0\,;1\,]$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ est minorée par 0 comme elle est décroissante, d'après le théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée ℓ. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. Or, f est continue sur $[\,0\,;1\,]$ (car dérivable) donc en ℓ, ainsi d'après le théorème du point fixe, $f(\ell) = \ell$. Or pour $x \in \mathbb{R}$:

$$x = f(x) \iff x = \frac{x}{1+x+x^2} \iff x(1+x+x^2) = x \iff x^3 + x^2 = 0$$
$$\iff x^2(1+x) = 0 \iff x \in \{0, -1\}$$

Ainsi, $\ell \in \{0, -1\}$, de plus, $\ell \in [\,0\,;1\,]$ donc nécessairement $\ell = 0$. Par conséquent, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors comme $\dfrac{1}{n} + 1 + n \geqslant n+1$, en passant à l'inverse (décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), il vient

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1} = \frac{1}{\frac{1}{n} + 1 + n} \leqslant \frac{1}{1+n}$$

5. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: «$0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$».
   - Comme $u_1 = \dfrac{1}{3}$, on a $0 < u_1 \leqslant \dfrac{1}{2}$, dès lors $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, ainsi, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant 1$, alors par croissance stricte de f sur $[\,0\,;1\,]$,

   $$f(0) < f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

   Or, $f(0) = 0$ et $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+2}$ (en appliquant ce qui précède à $n+1$), dès lors $0 < u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$. Par conséquent, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   En conclusion, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{{u_n}^2 + u_n + 1}$, en inversant (possible car $u_{n+1} \neq 0$),

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{{u_n}^2 + u_n + 1}{u_n} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$$

7. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: «$\dfrac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$».
   - Pour $n = 1$, $n + 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 3 = \dfrac{1}{u_1} \geqslant \dfrac{1}{u_1}$, ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, en utilisant la question 6,

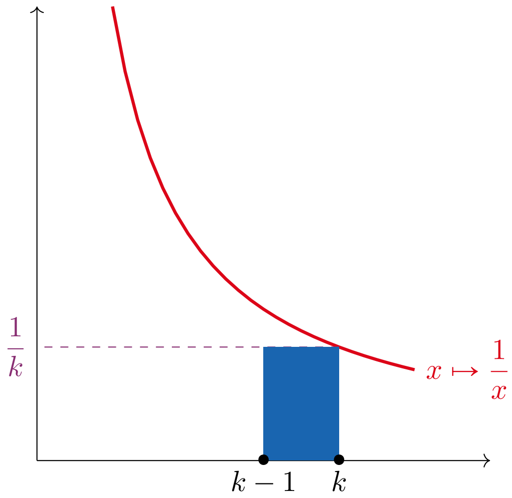
   $$\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n} \underset{\mathscr{P}(n)}{\leqslant} u_n + 1 + \left(n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)$$

   De plus, en utilisant la question 5, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, ainsi, $u_{n+1} \leqslant n + 2 + \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{1}{k}$, dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'inégalité demandée est vraie.

8. Soit un entier $k \geqslant 2$, alors pour tout $t \in [\,k-1\,;k\,]$, par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{1}{k} \leqslant \dfrac{1}{t}$, puis par croissance de l'intégrale sur $[\,k-1\,;k\,]$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, puis par intégration d'une fonction constante, on obtient $\dfrac{1}{k} \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Remarque 1. Cette formule s'interprète graphiquement :



L'aire du rectangle bleu vaut $\frac{1}{k}$ et elle est plus petite que l'aire sous la courbe entre $k-1$ et k qui vaut $\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

9. La question précédente, permet de montrer, en utilisant la relation de Chasles, que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n) + 1$$

ainsi, d'après la question 7,

$$0 < \frac{1}{u_n} \leqslant n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant\leqslant n + 1 + \ln(n) + 1 = n + \ln(n) + 2$$

par décroissance de la fonction inverse, on en déduit que $u_n \geqslant \frac{1}{n+\ln(n)+2}$ de plus, en utilisant la question 5, $nu_n \leqslant \frac{n}{n+1} \leqslant 1$. En réunissant ces deux résultats, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{n}{n+\ln(n)+2} \leqslant nu_n \leqslant 1$$

Or, $n+\ln(n)+2 \sim n$, donc $\frac{n}{n+\ln(n)+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, par théorème d'encadrement $nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. On peut en conclure que $u_n \sim \frac{1}{n}$.

Les matrices stochastiques (fidèles à leurs lignes)

1. Comme $p \in \,]\,0\,;1\,[$, p, $1-p$, 1 et 0 sont bien des nombres positifs ou nuls. De plus, $p+(1-p)+0=1$, $0+p+(1-p)=1$ et $0+0+1=1$. Ainsi, la matrice A est bien stochastique.
2. $A^0 = I_3$ par convention et $A^2 = \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ 0 & p^2 & 1-p^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété : «il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tels que $A^n = \begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.»
   - Pour $n=0$, comme $A^0 = I_3$, on pose donc $a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 = 0$, Ainsi, $A^0 = \begin{pmatrix} p^0 & a_0 & b_0 \\ 0 & p^0 & c_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

- Pour $n=1$, comme $A^1=A$ on pose donc $a_1=1-p$, $b_1=0$ et $c_1=1-p$ de sorte que $A^1=\begin{pmatrix} p^1 & a_1 & b_1 \\ 0 & p^1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ et $\mathscr{P}(1)$ est vraie[1].
- Soit $n\in\mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ et montrons $\mathscr{P}(n+1)$. Ainsi, il existe $(a_n,b_n,c_n)\in\mathbb{R}^3$ tels que $A^n=\begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, ainsi, on obtient :

$$A^{n+1}=A\times A^n=\begin{pmatrix} p & (1-p) & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} p^n & a_n & b_n \\ 0 & p^n & c_n \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^{n+1} & pa_n+p^n-p^{n+1} & pb_n+(1-p)c_n \\ 0 & p^{n+1} & pc_n+(1-p) \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

  Ainsi, en posant $a_{n+1}=pa_n+p^n-p^{n+1}$, $b_{n+1}=pb_n+(1-p)c_n$ et $c_{n+1}=pc_n+(1-p)$, on obtient que $A^{n+1}=\begin{pmatrix} p^{n+1} & a_{n+1} & b_{n+1} \\ 0 & p^{n+1} & c_{n+1} \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, ainsi la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On a de plus, trouvé l'expression de a_0, a_1, b_0, b_1, c_0 et c_1, ainsi que la relation demandée entre c_{n+1} et c_n.

4. La suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique. Cherchons le point fixe :

$$\ell=p\ell+(1-p)\iff(1-p)\ell=(1-p)\underset{p\neq 0}{\iff}\ell=1$$

On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $v_n=c_n-\ell$, en effectuant la différence entre ces deux équations,

$$\begin{cases} c_{n+1} &= pc_n+(1-p) \\ \ell &= p\ell+(1-p)\end{cases}$$

On obtient que $v_{n+1}=pv_n$. Ainsi la suite (v_n) est géométrique de raison p et donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=v_0p^n=-p^n$, et $c_n=v_n+1=1-p^n$.

5. Grâce à la relation de récurrence de $(a_n)_n$ trouvée à la question 3, on trouve que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a_{n+2}-2pa_{n+1}+p^2a_n &= (pa_{n+1}+p^{n+1}-p^{n+2})-2pa_{n+1}+p^2a_n \\ &= -pa_{n+1}+p^{n+1}-p^{n+2}+p^2a_n \\ &= -p(pa_n+p^n-p^{n+1})+p^{n+1}-p^{n+2}+p^2a_n=0\end{aligned}$$

6. D'après la question précédente, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. On cherche à résoudre l'équation caractéristique $r^2-2pr+p^2=0$ d'inconnue r. Or,

$$r^2-2pr+p^2=(r-p)^2$$

Ainsi p est racine double de cette équation caractéristique. Par conséquent :

$$\exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\quad\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n=(\alpha+\beta n)p^n$$

Or, $a_0=0=\alpha$ et $a_1=1-p=(\alpha+\beta)p$ soit $1-p=\beta p$, comme $p>0$, on obtient$\beta=\dfrac{1}{p}-1=\dfrac{1-p}{p}$. Par conséquent, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=n(p^{n-1}-p^n)=p^{n-1}n(1-p)$.

7. Si M et N sont deux éléments de $\mathcal{E}$, alors $MU=U$ et $NU=U$, ainsi par associativité du produit matriciel :

$$(MN)U=M(NU)=MU=U$$

et donc $MN\in\mathcal{E}$.

8. Posons, pour $n\in\mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$A^n\in\mathcal{E}$».
   - Pour $n=0$, la propriété est vraie car $A^0U=I_3U=U$ donc $A^0\in\mathcal{E}$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie..

1. $\mathscr{P}(1)$ n'est pas nécessaire, mais cela permet de donner les valeurs de a_1, b_1 et c_1 qui sont demandées.

- Pour $n=1$[2], $A^1U = AU = \begin{pmatrix} p\times 1+(1-p)\times 1+0\times 1 \\ 0\times 1+p\times 1+(1-p)\times 1 \\ 0\times 1+0\times 1+0\times 1\end{pmatrix} = U$ donc $A^1\in\mathcal{E}$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie, et comme $A^{n+1}=A^n\times A$ est le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$, d'après la question précédente, on obtient que $A^{n+1}\in\mathcal{E}$, par conséquent, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n\in\mathcal{E}$. On en déduit que $A^nU=U$ et donc que la somme des éléments de chaque ligne vaut 1, notamment la première ligne, ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $p^n+a_n+b_n=1$. Dès lors,

$$\forall n\in\mathbb{N}\qquad b_n = 1-p^n-a_n = 1-p^n-n(p^{n-1}-p^n) = 1-np^{n-1}+(n-1)p^n$$

Remarque 2. En remplaçant a_n, b_n et c_n par les expressions trouvés aux questions 4, 6 et 8, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$A^n = \begin{pmatrix} p^n & np^{n-1}(1-p) & 1+p^{n-1}(-n+p(n-1)) \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

9.

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L_2\leftarrow L_2-L_1$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L_2\leftarrow -L_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L_1\leftarrow L_1-L_3$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ainsi P est inversible et $P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

10. En effectuant successivement les deux produits matriciels, on obtient

$$D=P^{-1}BP = P^{-1}\begin{pmatrix}p&0&1-p\\0&p&1-p\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\0&0&1\end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix}p&0&1\\p&-p&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&0&1\\p&-p&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&0&0\\0&p&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice $D=P^{-1}BP=\begin{pmatrix}p&0&0\\0&p&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ est diagonale[3].

11. Par propriété des puissances des matrices diagonales, $D^n=\begin{pmatrix}p^n&0&0\\0&p^n&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

2. On a pas besoin a priori d'initialiser avec $n=1$, mais dans l'hérédité, on va avoir besoin que $A\in\mathcal{E}$.
3. D'où son nom de D.

12. On démontre par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad D^n = P^{-1}B^nP$$

Donc $B^n = PD^nP^{-1}$ En effectuant les deux produits matriciels, on trouve que

$$\begin{aligned} B^n = PD^nP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^n & 0 & 0 \\ 0 & p^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1 \\ p^n & -p^n & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1 \\ p^n & -p^n & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

13. Par produits matriciels :

$$\begin{aligned} C^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ BC &= \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p(1-p) & p(p-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ CB &= \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 & 1-p \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p(1-p) & p(p-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, B et C commutent, on utilise alors la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} A^n = (B+C)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C^k B^{n-k} &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} C^k B^{n-k} + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{C^k}_{=0_3} B^{n-k} \\ &= \binom{n}{0} C^0 B^n + \binom{n}{1} C^1 B^{n-1} + 0_3 = B^n + nCB^{n-1} \end{aligned}$$

En utilisant l'expression des puissances de B déterminée à la question précédente :

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1-p & p-1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p^{n-1} & 0 & 1-p^{n-1} \\ 0 & p^{n-1} & 1-p^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & 0 & 1-p^n \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & (1-p)p^{n-1} & (p-1)p^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^n & +n(1-p)p^{n-1} & 1-p^n+n(p-1)p^{n-1} \\ 0 & p^n & 1-p^n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On retrouve ainsi l'expression de A^n de la partie précédente.

14. $A \in \mathcal{E}$ ssi $AU = U$ ssi pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, le coefficient à la i-ième ligne de AU vaut celui à la i-ième ligne de U ssi pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \times 1 = 1$ ssi pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = 1$ ssi A est stochastique (car ces coefficients sont positifs par hypothèse).

15. Soient M et N deux matrices stochastiques, montrons que $P = MN$ est stochastique. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, alors $p_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}n_{k,j}$ est une somme de produits de coefficients positifs ou nul, ainsi $p_{i,j} \geqslant 0$. De plus, $PU = (MN)U = M(NU) = MU = U$, donc $P \in \mathcal{E}$, ainsi, en utilisant la question précédente, $P = MN$ est une matrice stochastique. Par conséquent, le produit de deux matrices stochastiques est stochastique.