La matrice A : un triangle dans un carré

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Soit $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors :

$$Y = AX \iff \begin{cases} 2x & +2y & +z & = & a \\ & 2y & +z & = & b \\ & & 2z & = & c \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} 2x & & & = & a - b \\ & 2y & +z & = & b \\ & & 2z & = & c \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3}{\iff} \begin{cases} 2x & = & a & -b & \\ 2y & = & & b & -\dfrac{c}{2} \\ 2z & = & & & c \end{cases} \iff \begin{cases} x & = & \dfrac{a}{2} & -\dfrac{b}{2} & \\ y & = & & \dfrac{b}{2} & -\dfrac{c}{4} \\ z & = & & & \dfrac{c}{2} \end{cases}$$

Ceci prouve que A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Posons $a = 2 \in \mathbb{R}$ et $T = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, T est une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale. De plus, $aI_2 + T = A$.
3. $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, puis $T^3 = T^2 \times T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$
4. Remarquons que $(2I_3)T = 2T$ et que $T(2I_3) = 2T$, ainsi, $2I_3$ et T commutent. Appliquons la formule du binôme de Newton :

$$A^n = (2I_3 + T)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} T^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} T^k (2I_3)^{n-k} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} T^k (2I_3)^{n-k}$$

$$= 2^n I_3 + n2^{n-1} T + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} T^2 + 0_3 = \begin{pmatrix} 2^n & n2^n & n2^{n-1} + 2^{n-2} n(n-1) \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

On n'en finit jamais avec les suites

On définit l'intervalle $I = [\, \mathrm{e} \,; +\infty \,[$ et on pose pour $x \in I$, $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

1. f est un quotient de fonctions dérivables sur I dont le dénominateur ne s'annule pas sur I, ainsi, f est dérivable sur I, de plus, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{\ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

Présentons deux méthodes pour la stabilité [1] :

- Comme $x \geqslant \mathrm{e}$, par croissance du logarithme, $\ln(x) \geqslant \ln(\mathrm{e}) = 1$, ainsi, $f'(x) \geqslant 0$. Ceci prouve que f est croissante sur I. Soit $x \in I$, alors $x \geqslant e$ par croissance de f sur I, $f(x) \geqslant f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$, donc [2] $f(x) \in I$. Ainsi, l'intervalle I est stable par f.

1. La première est plus courte car utilise que la croissance alors que la seconde nécessite la croissance stricte.
2. Au passage, on remarque que e est un point fixe de f.

- Si $x > \mathrm{e}$, par croissance stricte du logarithme, $\ln(x) > \ln(\mathrm{e}) = 1$, ainsi, $f'(x) > 0$ et $f'(\mathrm{e}) = 0$, ainsi, f' est positive sur I et ne s'annule qu'une seule fois, ainsi f est strictement croissante sur I. Comme elle est aussi continue sur I (car dérivable), d'après le théorème de la bijection strictement monotone, f réalise une bijection de I vers $f(I) = \left[f(\mathrm{e})\,;\lim_{x\to+\infty} f(x) \right[= [\,\mathrm{e}\,;+\infty\,[$ (par croissance comparée). Dès lors, $f(I) = I \subset I$ et donc l'intervalle I est stable par f.

2. Soit $x \in I$, nous avons montré, lors de la question 1, que $f'(x) \geqslant 0$. De plus,
$$\frac{1}{4} - f'(x) = \frac{\ln^2(x) - 4\ln(x) + 4}{4\ln^2(x)} = \frac{(\ln^2(x) - 2)^2}{4\ln^2(x)} \geqslant 0$$
Dès lors, $f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. Par conséquent, pour tout $x \in I$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$

3. La fonction f est continue sur I (car dérivable sur I) dérivable sur $\mathring{I}$ et pour tout $x \in \mathring{I}$, d'après la question précédente, $|f'(x)| = f'(x) \leqslant 1/4$. D'après l'inégalité des accroissements finis, f est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: «$|u_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$».
   - Pour $n = 0$, $|u_0 - e| = 3 - e \leqslant 1 = \dfrac{1}{4^0}$, ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Comme f est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne,
   $$|u_{n+1} - e| = |f(u_n) - f(e)| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - e| = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$$
   Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

5. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e - \dfrac{1}{4^n} \leqslant u_n \leqslant e + \dfrac{1}{4^n}$, comme $\dfrac{1}{4^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par théorème d'encadrement, on en déduit que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$

f_n : la fonction qui ne manque pas de puissance à la racine

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $f_n\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n + 9x^2 - 4 \end{cases}$

1.
```python
def fn(x:float,n:int)->float:
    return x**n + 9*x*x - 4
```

2. Si $g\colon [\,a\,;b\,] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[\,a\,;b\,]$ et que y est un réel vérifiant $g(a) \leqslant y \leqslant g(b)$ (ou $g(b) \leqslant y \leqslant g(a)$), alors il existe $c \in [\,a\,;b\,]$, tel que $y = g(c)$.

3. $f_n(0) = -4$ et $f_n(2/3) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, ainsi, $f_n(0) \leqslant 0 \leqslant f_n(2/3)$, et f_n est continue sur $[\,0\,;2/3\,]$ (car polynomiale), d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [\,0\,;2/3\,]$ tel que $f_n(c) = 0$

4.
```python
def Dichotomie(eps:float,n:int)->float:
    a = 0        #a tel que f_n(a)<0
    b = 2/3      #b tel que f_n(b)>0
    while b - a > eps:
        c = (a + b)/2
        if fn(c,n) > 0: #Donc f_n(a) <= 0 <= f_n(c)
            b = c
        else: #Donc f_n(c) <= 0 <= f_n(b)
            a = c
    return a
```

5. La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ (car polynomiale), de plus, pour $x \geqslant 0$, $f_n'(x) = nx^{n-1} + 18x \geqslant 0$, de plus, $f_n'(x) = 0$ ssi $x = 0$, ainsi, f_n' est une fonction positive ou nulle qui ne s'annule qu'une seule fois, ainsi f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, f_n est injective, donc il existe un unique $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(c) = 0$.

6.
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, $x + 9x^2 - 4 = 0$ ssi $x = \dfrac{-1-\sqrt{145}}{18}$ ou $x = \dfrac{-1+\sqrt{145}}{18}$. Comme $x_1 \geqslant 0$, nécessairement $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{145}}{18}$
   - Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 9x^2 - 4 = 0$ ssi $10x^2 - 4 = 0$ ssi $x = \pm\sqrt{\dfrac{2}{5}}$. Comme $x_2 \geqslant 0$, nécessairement $x_2 = \sqrt{\dfrac{2}{5}}$

7. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite définie implicitement.

8. Soit $x \in \,]\,0\,;1\,[$,
$$f_n(x) - f_{n+1}(x) = x^n + 9x^2 - 4 - (x^{n+1} + 9x^2 - 4) = x^n - x^{n+1} = x^n(1-x)$$
Or, $x > 0$ et $1 - x > 0$, par produit, $f_n(x) - f_{n+1}(x) > 0$, dès lors, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

9. D'après la question 3, on sait que $x_n \in [\,0\,;2/3\,]$. Or $f_n(0) \neq 0$ et $f_n(x_n) = 0$, ainsi nécessairement $x_n \neq 0$, d'où $x_n \in \,]\,0\,;1\,[$. D'après la question 8, $f_{n+1}(x_n) < f_n(x_n) = 0$. Par conséquent, $f_{n+1}(x_n)$ est strictement négatif.

10. On dit que g est une fonction croissante sur I si
$$\forall (x,x') \in I^2 \qquad x \leqslant x' \Longrightarrow g(x) \leqslant g(x')$$

11. Fixons $(x,x') \in I^2$ tel que $g(x) < g(x')$. Supposons que $x \geqslant x'$, alors, par croissance de g,
$$g(x) \geqslant g(x') > g(x)$$
Ce qui est absurde, ainsi nécessairement $x < x'$.

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0 > f_{n+1}(x_n)$. Or, la fonction f_{n+1} est croissante, d'après la question 11, on en déduit que $x_{n+1} > x_n$. Ceci prouve que $(x_n)_n$ est une suite strictement croissante.

13. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [\,0\,;2/3\,]$, ainsi, la suite $(x_n)_n$ est majorée par $2/3$, comme elle est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, $(x_n)_n$ est une suite convergente.

14. Présentons deux méthodes similaires :
   - Notons ℓ la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant x_n \leqslant 2/3$, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, $0 \leqslant \ell \leqslant 2/3$. De plus, comme $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant {x_n}^2 \leqslant (2/3)^n$, comme $|2/3| < 1$, $(2/3)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, ${x_n}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, par produit de limites, $9{x_n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 9\ell^2$, par somme de limites, $0 = {x_n}^n + 9{x_n}^2 - 4 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 + 9\ell^2 - 4$, par unicité de la limite, $0 = 9\ell^2 - 4$, ainsi, $\ell^2 = 4/9$, comme $\ell \geqslant 0$, $\ell = 2/3$. Ainsi, $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2/3$.
   - Remarquons, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ${x_n}^2 = \dfrac{4 - {x_n}^n}{9}$, de plus, comme $0 \leqslant x_n \leqslant 2/3$, en appliquant la fonction $x \mapsto x^n$, qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient $0^n \leqslant {x_n}^n \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$, comme $|2/3| < 1$, $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ainsi, par théorème d'encadrement ${x_n}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Par somme, ${x_n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{4}{9}$. Or, la fonction racine carrée est continue en $4/9$, donc par caractérisation séquentielle de la continuité, il vient $\sqrt{{x_n}^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{4/9}$. Comme $x_n \geqslant 0$, il en découle que $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 2/3$

15. La fonction $x \mapsto 9x^2 + x - 4$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$ (car polynomiale) et ne s'annule pas sur cet intervalle (car s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}_+$ en x_1 avec $x_1 \in [\,0\,;2/3\,]$). Ainsi, par quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, on peut en déduire que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: «il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $h^{(n)} : x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(9x^2 + x - 4)^{n+1}}$»

- On pose $P_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$ de sorte que $h^{(0)} = h\colon x \mapsto \dfrac{P_0(x)}{(9x^2+x-4)^{0+1}}$, ainsi, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathscr{P}(n)$ vraie, ainsi, il existe P_n un polynôme tel que $h^{(n)}\colon x \mapsto \dfrac{P_n(x)}{(9x^2+x-4)^{n+1}}$.
  En dérivant $h^{(n)}$ comme un quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, on obtient, pour tout $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= \frac{P_n'(x) \times (9x^2+x-4)^{n+1} - P_n(x) \times (n+1) \times (18x+1) \times (9x^2+x-4)^n}{(9x^2+x-4)^{2n+2}} \\ &= \frac{P_n'(x) \times (9x^2+x-4) - P_n(x) \times (n+1) \times (18x+1)}{(9x^2+x-4)^{n+2}} \end{aligned}$$

  On pose alors $P_{n+1} = (9X^2+X-4)P_n' - (n+1)(18X+1)P_n \in \mathbb{R}[X]$. Il s'ensuit que $h^{(n+1)}\colon x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{(9x^2+x-4)^{n+2}}$, ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété est vraie.

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors fg est aussi de classe $\mathscr{C}^n$ et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme h et f_1 sont de classe $\mathscr{C}^n$, on peut appliquer la formule de Leibniz. De plus, la dérivée n-ième d'une fonction constante est nulle, ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {f_1}^{(k)} h^{(n-k)} = 0$$

Or, ${f_1}^{(k)} = 0$ pour $k \geqslant 3$, en coupant la somme en deux, on obtient ainsi :

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} {f_1}^{(k)} h^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} {f_1}^{(k)} h^{(n-k)} + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} {f_1}^{(k)} h^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} {f_1}^{(k)} h^{(n-k)} + 0$$

Dès lors, pour $x \geqslant 1$,

$$(9x^2+x-4)\frac{P_n(x)}{(9x^2+x-4)^{n+1}} + n(18x+1)\frac{P_{n-1}(x)}{(9x^2+x-4)^n} + \frac{n(n-1)}{2} \times 18 \times \frac{P_{n-2}(x)}{(9x^2+x-4)^{n-1}} = 0$$

En multipliant par $(9x^2+x-4)^n$, il vient, pour tout $x \geqslant 1$:

$$P_n(x) + n(18x+1)P_{n-1}(x) + 9n(n-1)P_{n-2}(x)(9x^2+x-4) = 0$$

Ceci démontre que $P_n + n(18X+1)P_{n-1} + 9n(n-1)(9X^2+X-4)P_{n-2}$ a une infinité de racines (tous les $x \geqslant 1$), ainsi, c'est le polynôme nul par conséquent :

$$P_n + n(18X+1)P_{n-1} + 9n(n-1)(9X^2+X-4)P_{n-2} = 0$$

Les polynômes de la ferme

Problème 2 : les polynômes de la ferme

Cas particulier $\mathbb{R}_2[X]$

1. $2X^2 + 10X + 12 = 2(X^2+5X+6) = 2(X+3)(X+2)$. Comme $X+3$ et $X+2$ sont des polynômes de degré 1, ils sont bien irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Posons $P = (X-3)(X-4)$, alors $d^\circ P = 2$, $P(3) = P(4) = 0$. De plus, $P(5) = 2$.
3. Posons $Q = \dfrac{1}{2}P = \dfrac{1}{2}(X-3)(X-4)$, alors $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.

4. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ a au moins trois racines, alors $d^\circ P \leqslant 2$, ainsi, P a plus de racines que son degré, d'après le cours $P = 0$.

   Remarque 1. Si on avait oublié ce résultat (c'est mal !), on pouvait le retrouver dans le cas particulier d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$:
   - Si $d^\circ P = 2$ alors P admet au plus deux racines (le nombre exact est donné par le fameux discriminant)
   - Si $d^\circ P = 1$, alors $P = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times R$ et P admet une racine.
   - Si $d^\circ P = 0$, alors $P = a$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et P a aucune racine.
   - Si $d^\circ P = -\infty$, alors $P = 0$ admet une infinité de racines.

   Ainsi, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ admet au moins trois racines, nécessairement, on est dans le dernier cas et $P = 0$.
5. On a déjà établi l'existence d'un tel polynôme à la question 3. Soit R un autre polynôme de degré 2 tel que $R(3) = R(4) = 0$ et $R(5) = 1$. Posons alors $S = Q - R$, alors, $d^\circ S \leqslant \max(d^\circ Q, d^\circ R) = 2$. De plus,
   - $S(3) = Q(3) - R(3) = 0 - 0 = 0$
   - $S(4) = Q(4) - R(4) = 0 - 0 = 0$
   - $S(5) = Q(5) - R(5) = 1 - 1 = 0$

   Ainsi, S a au moins trois racines et son degré est majoré par 2. D'après la question 4. Ceci prouve qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
6. - $L_2 = -(X - 3)(X - 5)$
   - $L_3 = \dfrac{1}{2}(X - 4)(X - 5)$
7. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons $Q = P - (P(5)L_1 + P(4)L_2 + P(3)L_3)$. Alors :
   - $Q(3) = P(3) - P(5)L_1(3) - P(4)L_2(3) - P(3)L_3(3) = 0.$
   - $Q(4) = P(4) - P(5)L_1(4) - P(4)L_2(4) - P(3)L_3(4) = 0,$
   - $Q(5) = P(5) - P(5)L_1(5) - P(4)L_2(5) - P(3)L_3(5) = 0.$

   Comme le degré d'une somme est inférieure au maximum des degrés, $d^\circ Q \leqslant 2$ et Q a au moins trois racines, d'après la question 4, $Q = 0$ ainsi, $P = P(5)L_1 + P(4)L_2 + P(3)L_3$.
8. L_i est un produit de n polynômes de degré 1, comme le degré du produit est égal à la somme des degrés, on en déduit que $d^\circ L_i = n$.
9. Soit $j \in [\![0 ; n]\!]$:
   - Si $j = i$, alors $L_i(a_j) = \prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \dfrac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = 1$
   - Si $j \neq i$, alors $L_i(a_j) = \prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \dfrac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = \dfrac{a_j - a_j}{a_i - a_j} \times \prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq i\\k\neq j}}^{n} \dfrac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = 0$

   Ainsi, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$
10. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, posons $Q = P - \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$, soit $i \in [\![0 ; n]\!]$, alors

$$Q(a_i) = P(a_i) - \sum_{k=0}^{n} P(a_k)L_k(a_i) = P(a_i) - \sum_{k=0}^{n} P(a_k)\delta_{k,i} = P(a_i) - P(a_i) = 0$$

   Ainsi, Q possède au moins $n + 1$ racines, de plus, $d^\circ Q \leqslant \max(d^\circ P, d^\circ P(a_0)L_0, \ldots, d^\circ P(a_n)L_n)) \leqslant n$, ainsi, Q a un nombre de racines strictement supérieur à son degré, donc $Q = 0$. Ceci prouve que $P = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)L_k$
11. Soit $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ les points qui annulent f rangés par ordre strictement croissant :

$$a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} \leqslant b$$

   Soit $i \in [\![0 ; n]\!]$, la fonction f est dérivable sur $]\, x_i ; x_{i+1} \,[$, continue sur $[\, x_i ; x_{i+1} \,]$ (car dérivable), $f(x_i) = 0 = f(x_{i+1})$, ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in \,]\, x_i ; x_{i+1} \,[$ tel que $f'(y_i) = 0$. De plus,

$$x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < y_n < x_{n+1}$$

   Ainsi, f' s'annule au moins en $n + 1$ points deux à deux distincts les y_0, y_1 jusqu'à y_n.

12. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $f \in \mathscr{C}^{n+1}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$, si f s'annule $n+2$ fois sur $[\,a\,;b\,]$, alors $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[\,a\,;b\,]$.
   - Pour $n=0$. Soit $f \in \mathscr{C}^1([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Supposons que f s'annule deux fois en α, β avec $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$, alors comme f est continue sur $[\,\alpha\,;\beta\,]$ (car dérivable) dérivable sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ et que $f(\alpha)=0=f(\beta)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]\,\alpha\,;\beta\,[$ tel que $f^{(1)}(c)=0$, ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+2}([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$. Supposons que f s'annule $n+3$ fois. D'après la question 11, $g=f'$ s'annule au moins $n+2$ fois. De plus, g est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, en appliquant $\mathscr{P}(n)$ à g, il en découle que $g^{(n+1)}=f^{(n+2)}$ s'annule au moins une fois. Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

   Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété demandée est vraie.

13. S'il existe $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$ tel que $x=x_i$, alors $P(x)=P(x_i)=f(x_i)=f(x)$, ainsi, le membre de gauche de l'égalité est nul, de plus, comme $x=x_i$, un des termes dans le produit de droite est nul, ainsi le produit est nul, ainsi, n'importe quel $c \in [\,a\,;b\,]$ vérifie l'égalité demandée.

14. W est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ comme somme de fonctions qui le sont. De plus, pour $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$,

$$W(x_k)=f(x_k)-P(x_k)-\frac{Q(x_k)}{Q(x)}(f(x)-P(x)=f(x_k)-P(x_k)-0=0$$

   En outre,

$$W(x)=f(x)-P(x)-\frac{Q(x)}{Q(x)}(f(x)-P(x))=f(x)-P(x)-(f(x)-P(x))$$

   comme x n'est pas l'un des x_k, on peut en conclure que W est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ et s'annule $n+2$ fois, en utilisant la question 12, il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $W^{(n+1)}(c)=0$, ainsi,

$$f^{(n+1)}(c)-P^{(n+1)}(c)-\frac{Q^{(n+1)}(c)}{Q(x)}(f(x)-P(x))=0$$

   Or, $d^\circ P \leqslant n$, donc $P^{(n+1)}=0$, Q est un polynôme unitaire de degré $n+1$, ainsi, $Q^{(n+1)}=(n+1)!$ par conséquent, $f^{(n+1}(c)=\dfrac{(n+1)!}{Q(x)}(f(x)-P(x))$, Dès lors, $f(x)-P(x)=\dfrac{Q(x)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ ce qui est exactement le résultat demandé.

15. $f^{(n+1)}$ est continue sur $[\,a\,;b\,]$ (car f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$), ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes, $f^{(n+1)}$ est majorée et minorée. Ainsi, $f^{(n+1)}$ est bornée.

16. Comme M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$, on a que $|f^{(n+1)}(c)| \leqslant M$, ainsi, en passant à la valeur absolue dans l'égalité démontrée aux questions 13 et 14, il vient que pour tout $x \in [\,a\,;b\,]$:

$$|f(x)-P(x)|=\frac{|Q(x)|}{(n+1)!}|f^{(n+1)}(c)| \leqslant \frac{M|Q(x)|}{(n+1)!}$$