Révision 9 (algèbre linéaire)

Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (5x+y+6z, x+5y+6z, 6x+6y+12z) \end{cases}$ et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On note $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$ de sorte que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
   - $f(e_1) = f(1,0,0) = (5,1,6) = 5e_1 + 1e_2 + 6e_3$
   - $f(e_2) = f(0,1,0) = (1,5,6) = 1e_1 + 5e_2 + 6e_3$
   - $f(e_3) = f(0,0,1) = (6,6,12) = 6e_1 + 6e_2 + 12e_3$

   Alors, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$

2. Par définition, $\det(f) = \det(A)$, proposons deux méthodes pour calculer $\det(A)$:
   - Soit C_1, C_2 et C_3 les trois colonnes de A, comme $C_3 = C_1 + C_2$, ainsi, $\det(f) = \det(A) = 0$.
   - On utilise le 1 à la deuxième ligne première colonne, pour faire apparaître des 0 sur la première colonne :
   $\det(A) \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 5L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 6L_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & -24 & -24 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & -24 & -24 \end{vmatrix} = 0$ (deux lignes identiques et le déterminant est alternée en les lignes)

3. En faisant une opération sur les colonnes, puis une sur les lignes puis en développant sur la première colonne, on trouve :

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 6 \\ 1 & 5-\lambda & 6 \\ 6 & 6 & 12-\lambda \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 6 \\ \lambda-4 & 5-\lambda & 6 \\ 0 & 6 & 12 \end{vmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{=} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 6 \\ 0 & 6-\lambda & 12 \\ 0 & 6 & 12-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 12 \\ 6 & 12-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\left[(6-\lambda)(12-\lambda) - 6 \times 12\right] = (4-\lambda)(\lambda^2 - 18\lambda) = \lambda(4-\lambda)(\lambda-18)$$

   Ceci démontre que P est bien une fonction polynomiale de degré 3 dont les racines sont 0, 4 et 18.

4. - $\mathrm{rg}(A) \underset{C_3 = C_1 + C_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 2$ (deux colonnes non colinéaires)
   - $\mathrm{rg}(A - 4I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} \underset{C_2 = C_1}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = 2$ (deux colonnes non colinéaires)
   - $\mathrm{rg}(A - 18I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -13 & 1 & 6 \\ 1 & -13 & 6 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix} \underset{-2C_3 = C_1 + C_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -13 & 1 \\ 1 & -13 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} = 2$ (deux colonnes non colinéaires)

   D'après le théorème du rang pour les matrices : $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 - \mathrm{rg}(A) = 3 - 2 = 1$ (le 3 désigne le nombre de colonnes de la matrice), de même, $\dim(\mathrm{Ker}(A - 4I_3)) = 3 - \mathrm{rg}(A - 4I_3) = 1$ et $\dim(\mathrm{Ker}(A - 18I_3)) = 1$.

5. Soit $\lambda \in \{0, 4, 18\}$, comme $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)) = 1$, ainsi, pour trouver une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$ il suffit d'un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$:
   - Pour $\lambda = 0$, $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 12 \end{pmatrix}$, alors comme $C_1 + C_2 = C_3$, on a $1C_1 + 1C_2 + (-1)C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A)$, donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
   - Pour $\lambda = 4$, $A - 4I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 6 \\ 6 & 6 & 11 \end{pmatrix}$, alors comme $C_1 = C_2$, on a $1C_1 + (-1)C_2 + 0C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 4I_3)$, donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A - 4I_3)$.
   - Pour $\lambda = 18$, $A - 18I_3 = \begin{pmatrix} -13 & 1 & 6 \\ 1 & -13 & 6 \\ 6 & 6 & -6 \end{pmatrix}$, alors comme $C_1 + C_2 = -2C_3$, on a $1C_1 + 1C_2 + 2C_3 = 0$ donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A - 18I_3)$, donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A - 18I_3)$.

   Remarque 1. Et pour les autres λ ? La question 3 montre que $\det(A - \lambda I_3) \neq 0$ si $\lambda \notin \{0, 4, 18\}$, ainsi la matrice $A - \lambda I_3$ est inversible et son noyau est réduit à $\{0_{3,1}\}$ et donc une base de $A - \lambda I_3$ est la famille vide.

6. $\mathscr{B}' = ((1,1,-1),(1,-1,0),(1,1,2))$

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{C_3 \leftarrow C_3 + 2C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -6$$

(où on a développé par rapport à la troisième ligne). Ainsi, comme $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

7. Ainsi, $\mathscr{B}' = ((1,1,-1),(1,-1,0),(1,1,2))$. Soit $(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $\alpha(1,1,-1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(1,1,2) = 0_{\mathbb{R}^3}$. On a alors $\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha-\beta+\gamma &= 0 \\ -\alpha+2\gamma &= 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ -2\beta &= 0 \\ -\beta+\gamma &= 0 \end{cases} \iff \beta = \gamma = \alpha = 0$. Ainsi, $\mathscr{B}'$ est une famille libre. De plus, $|\mathscr{B}'| = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Donc, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

8. Posons $e_1' = (1,1,-1)$, $e_2' = (1,-1,0)$ et $e_3' = (1,1,2)$, de sorte que $\mathscr{B}' = (e_1', e_2', e_3')$. Il s'agit donc de calculer l'image de ces vecteurs et de les décomposer dans $\mathscr{B}'$:
   - $f(1,1,-1) = (0,0,0) = 0e_1' + 0e_2' + 0e_3'$
   - $f(1,-1,0) = (4,-4,0) = 4e_2' = 0e_1' + 4e_2' + 0e_3'$
   - $f(1,1,2) = (18,18,36) = 18e_3' = 0e_1' + 0e_2' + 18e_3'$

   Remarque 2. Ici, comme on avait pris des vecteurs dans des noyaux, on était assuré sans calcul d'avoir ce résultat. En effet, si $X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_3)$, alors $(A - \lambda I_3)X = 0$ donc $AX - \lambda X = 0$ donc $AX = \lambda X$. En repassant cette égalité avec l'endomorphisme f : $f(e_1') = 0e_1'$, $f(e_2') = 4e_2'$ et $f(e_3') = 18e_3'$

   Ainsi, $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{array}{c} \\ e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1') & f(e_2') & f(e_3') \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} \end{array}$

9. $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1' & e_2' & e_3' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$. Calculons P^{-1} en effectuant des opérations sur les lignes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L1 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{6} L_3 \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1/6 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$$

   Dès lors, $P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} = P^{-1} = \dfrac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

10. D'après la formule de changement de base, $A = PDP^{-1}$, puis pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$. Pour $p = 0$, $A^p = I_3$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$A^p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^p & 0 \\ 0 & 0 & 18^p \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 \times 4^p + 18^p & 18^p - 3 \times 4^p & 2 \times 18^p \\ 18^p - 3 \times 4^p & 3 \times 4^p + 18^p & 2 \times 18^p \\ 2 \times 18^p & 2 \times 18^p & 4 \times 18^p \end{pmatrix}$$

   Remarque 3. Attention, la formule $D^p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^p & 0 \\ 0 & 0 & 18^p \end{pmatrix}$ est fausse pour $p = 0$ car $0^0 = 1$.

11. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors $MD = \begin{pmatrix} 0 & 2b & 3\sqrt{2}c \\ 0 & 2e & 3\sqrt{2}f \\ 0 & 2h & 3\sqrt{2}i \end{pmatrix}$ et $DM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2d & 2e & 2f \\ 3\sqrt{2}g & 3\sqrt{2}h & 3\sqrt{2}i \end{pmatrix}$, ainsi :

$$M \in C(D) \iff \begin{cases} 0 &= 0 \\ 2b &= 0 \\ 3\sqrt{2}c &= 0 \\ 0 &= 2d \\ 2e &= 2e \\ 3\sqrt{2}f &= 2f \\ 0 &= 3\sqrt{2}g \\ 2h &= 3\sqrt{2}h \\ 3\sqrt{2}i &= 3\sqrt{2}i \end{cases} \iff b = c = d = f = g = h = 0 \iff M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$
$$\iff M = aE_{1,1} + eE_{2,2} + iE_{3,3} \iff M \in \text{vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$$

On en déduit que $C(D) = \text{vect}(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$, ainsi $C(D)$ est un espace vectoriel, dont $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une famille génératrice. De plus, cette famille est libre (sous-famille de la base canonique donc libre). Ainsi, $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$ est une base de $C(D)$. On en déduit que $\dim(C(D)) = 3$.

12. On pose $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{18} \end{pmatrix}$, alors $\Delta^2 = D$.

13. On pose alors $R = P\Delta P^{-1}$, alors $R^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

14. En alternant les signes, on pose alors :

$$R_1 = R \qquad R_2 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1} \qquad R_3 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1} \qquad R_4 = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1}$$

Alors pour tout $i \in [\![1\,; 4]\!]$, ${R_i}^2 = A$.

15. (a) Proposons deux méthodes[1] :
   - Soit $(M, N) \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})^2$. Si on pose $A = MN$, pour tout $k \in [\![1\,; 3]\!]$, $a_{k,k} = \sum\limits_{i=1}^{3} m_{k,i}n_{i,k}$, ainsi,
   $$\text{tr}(MN) = \text{tr}(A) = \sum_{k=1}^{3} a_{k,k} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} m_{k,i}n_{i,k}$$
   De même, on ppose $B = NM$, pour tout $i \in [\![1\,; 3]\!]$, $b_{i,i} = \sum\limits_{k=1}^{3} n_{i,k}m_{k,i}$, donc
   $$\text{tr}(NM) = \text{tr}(B) = \sum_{i=1}^{3} b_{i,i} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} n_{i,k}m_{k,i} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} m_{k,i}n_{i,k} = \text{tr}(MN)$$
   - Posons $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ d' & e' & f' \\ g' & h' & i' \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors :
   $$\begin{aligned} MN &= \begin{pmatrix} aa' + bd' + cg' & \star & \star \\ \star & db' + ee' + fh' & \star \\ \star & \star & gc' + hf' + ii' \end{pmatrix} \\ \text{tr}(MN) &= (aa' + bd' + cg') + (db' + ee' + fh') + (gc' + hf' + ii') \\ NM &= \begin{pmatrix} a'a + b'd + c'g & \star & \star \\ \star & d'b + e'e + f'h & \star \\ \star & \star & g'c + h'f + i'i \end{pmatrix} \\ \text{tr}(NM) &= (a'a + b'd + c'g) + (d'b + e'e + f'h) + (g'c + h'f + i'i) \end{aligned}$$
   Ainsi, $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$

   Remarque 4. Dans la deuxième méthode, on a mis des $\star$ sur les coefficients non diagonaux de MN et de NM car on n'a pas besoin de calculer ces coefficients pour montrer que $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$.

1. Qui reviennent en fait au même mais la première se généralise pour des matrices carrée de taille n tandis que l'autre est plus concrète mais est limitée aux matrices de taille 3.

(b) Si B et B' sont semblables, cela veut dire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ tel que $B = PB'P^{-1}$, alors

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P(B'P^{-1})) \underset{15a}{=} \mathrm{tr}((B'P^{-1})P) = \mathrm{tr}(B'I_3) = \mathrm{tr}(B')$$

(c) Comme, par définition, chaque matrice R_i est semblable à une matrice diagonale, d'après la question précédente, sa trace est égale à la trace de la matrice diagonale en question, ainsi, $\mathrm{tr}(R_1) = 2 + 3\sqrt{2}$, $\mathrm{tr}(R_2) = -2 - 3\sqrt{2}$, $\mathrm{tr}(R_3) = 2 - 3\sqrt{2}$ et $\mathrm{tr}(R_4) = 3\sqrt{2} - 2$. Par conséquent,

$$\mathrm{tr}(R_2) < \mathrm{tr}(R_3) < 0 < \mathrm{tr}(R_4) < \mathrm{tr}(R_1)$$

comme les traces de ces matrices sont deux à deux distinctes, on peut en déduire que les matrices R_1, R_2, R_3 et R_4 sont deux à deux différentes.

Remarque 5. Il y a donc au moins quatre racines carrées de A, mais attention à ne pas aller trop vite, peut-être qu'il y en a d'autres. Rien ne nous dit, *a priori*, qu'on ne peut pas en construire une qui ne soit pas de la forme $P\tilde{\Delta}P^{-1}$ où $\tilde{\Delta}$ est une matrice diagonale.

(d) $\Delta^2 = P^{-1}RP \times P^{-1}RP = P^{-1}R^2P = P^{-1}AP = D$

(e) $\Delta \times D = D^2 \times D = D^3$, tandis que $D \times \Delta = D \times D^2 = D^3$, ainsi $\Delta D = D\Delta$. Ainsi, Δ et D commutent.

(f) Comme $\Delta \in C(D)$ (question 15e), on en déduit, d'après la question 11, qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\Delta = aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{3,3} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

De surcroît, $\Delta^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} = D$, par identification, $a^2 = 0$, $b^2 = 2$, $c^2 = 18$, ainsi $a = 0$, $b = \pm\sqrt{2}$, $c = \pm 3\sqrt{2}$. Ceci montre que $R = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 2 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 3\sqrt{2} \end{pmatrix} P^{-1}$. On a donc montré que si R était une racine carrée de A, alors $R \in \{R_1, R_2, R_3, R_4\}$. Comme ces quatre matrices sont bien des racines carrées de A et qu'elles sont bien deux à deux distinctes, on en déduit que l'ensemble des matrices carrées de A est $\{R_1, R_2, R_3, R_4\}$. La matrice A admet donc exactement 4 racines carrées.

Remarques 6.

- Attention, cela ne se généralise pas si facilement, par exemple la matrice nulle admet une infinité de racines carrées, par exemple, $\lambda E_{1,2}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
- De même, $C(I_n)$ l'ensemble des matrices qui commutent avec l'identité, n'est pas constituée uniquement de matrices diagonales, contrairement à $C(D)$, car $C(I_n) = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- En revanche, si $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice diagonale, dont les coefficients sont deux à deux différents, on peut démontrer que $C(D)$ est constituée de l'ensemble des matrices diagonales, c'est assez classique, on prend une matrice M quelconque, on calcule les coefficients de MD et de DM et on voit à quelle condition $MD = DM$ (exercice 21 du TD8).