Pot-pourri de calculs

1. $f(x) \underset{0}{=} \mathrm{e}^{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)} = \mathrm{e}^1\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)}$. On pose $u = -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\dfrac{x^6}{720}+o(x^6)$, alors :
   - $u^2 = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^6}{24} + o(x^6)$
   - $u^3 = u \times u^2 = -\dfrac{x^6}{8} + o(x^6) \sim -\dfrac{x^6}{8}$
   - ainsi, $o(u^3) = o(x^6)$

   donc

$$f(x) = \mathrm{e} \times \mathrm{e}^u \underset{0}{=} \mathrm{e}\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)\right)$$
$$= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) + \frac{\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^6)}{2} + \frac{-\frac{x^6}{8} + o(x^6)}{6} + o(x^6)\right)$$
$$= \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x^2}{2} + \frac{\mathrm{e}x^4}{6} - \frac{\mathrm{e}31x^6}{720} + o(x^6)$$

2. Par composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^6$ sur $\mathbb{R}$, f est de classe $\mathscr{C}^6$, ainsi d'après la formule de Taylor-Young, la fonction f admet un développement limité en 0 à l'ordre 6 et le coefficient devant x^6, vaut $\dfrac{f^{(6)}(0)}{720}$. Par unicité d'un développement limité, $f^{(6)}(0) = -31e$.

3. $\det(M) \underset{C_1 \leftarrow C_1 - C_2}{=} \begin{vmatrix} x & 0 & y & x \\ 0 & y & 0 & x \\ 0 & x & 0 & y \\ 0 & y & y & x \end{vmatrix}$, en développant suivant la première colonne, on obtient $\det(M) = (-1)^2 x \begin{vmatrix} y & 0 & x \\ x & 0 & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$, en développant suivant la deuxième colonne, on obtient

$$\det(M) = xy(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} y & x \\ x & y \end{vmatrix} = xy(x^2 - y^2) = xy(x-y)(x+y)$$

4. Si X prend la valeur 1, Y vaut 1, si X prend la valeur 2, Y vaut 0, si X prend la valeur 3, Y prend la valeur 1 et si X prend la valeur 4, $Y = 2^4 = 16$, ainsi, $Y(\Omega) = \{0, 1, 16\}$.
   - $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}((X-2)^4 = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{4}$
   - $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}((X-2)^4 = 1) = \mathbb{P}(X - 2 = 1 \bigcup X - 2 = -1) = \mathbb{P}(X = 3 \bigcup X = 1) = \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{2}$ (l'union est disjointe)
   - $\mathbb{P}(Y = 16) = \mathbb{P}((X-2)^4 = 2^4) = \mathbb{P}(X - 2 = 2 \bigcup X - 2 = -2) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{1}{4} + 0$ (union disjointe)

5. Par définition de l'espérance, $\mathbb{E}(Y) = 0\mathbb{P}(X = 0) + 1\mathbb{P}(Y = 1) + 16\mathbb{P}(Y = 16) = \dfrac{1}{2} + 16\dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{2}$.
   D'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$, on calcule $\mathbb{E}(Y^2)$ à l'aide de la formule de transfert,

$$\mathbb{E}(Y^2) = 0^2\mathbb{P}(Y = 0) + 1^2\mathbb{P}(Y = 1) + 16^2\mathbb{P}(Y = 16) = \frac{1}{2} + 64 = \frac{129}{2}$$

   ainsi, $\mathbb{V}(Y) = \dfrac{129}{2} - \dfrac{81}{4} = \dfrac{258 - 81}{4} = \dfrac{177}{4}$

6. Soit un entier $n \geqslant 3$. En développant sur la première ligne, on obtient

$$\det(A_n) = 1 \times (-1)^{1+1}\det(A_{n-1}) + (-1)^{n+1} \times 1 \times \det(B_{n-1})$$

où B_{n-1} est la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la dernière colonne de A_n. En développant, suivant la première colonne de B_{n-1},

$$\det(B_{n-1}) = 1 \times (-1)^{(n-1)+1} \det(I_{n-2}) = (-1)^n$$

donc $\det(A_n) = \det(A_{n-1}) - 1$. Ainsi, $(\det(A_n))_{n\geqslant 2}$ est une suite arithmétique de raison -1. Comme $\det(A_1) = 1$, $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, alors, pour tout entier $n \geqslant 3$, $\det(A_n) = \det(A_2) - (n-2) = 2 - n$. On peut en conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\det(A_n) = 2 - n$.

7. On tire un ensemble de trois boules parmi les 10, il y a donc $\binom{10}{3} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{6} = 120$ tirages possibles.
8. Il y a cinq nombres impairs, ainsi, il y a $\binom{5}{3} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$ tirages avec que des nombres impairs, ainsi il y $120 - 10 = 110$ tirages avec au moins un nombre pair.

Un exercice d'actualité

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, $(x', y') \in \mathbb{C}^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} f(\lambda(x,y) + (x',y')) &= f(\lambda x + x', \lambda y + y') = ((\lambda x + x') + (\lambda y + y'), a(\lambda y + y')) \\ &= \lambda(x + y, ax) + (x' + y', ay') = \lambda f(x,y) + f(x',y') \end{aligned}$$

Ainsi, $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ est un endomorphisme de $\mathbb{C}^2$.

2. $\mathscr{B} = ((1,0),(0,1)$, ainsi $f(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$ et $f(0,1) = (1,a) = 1(1,0) + a(0,1)$, ainsi, $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
3. $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = 1 \times (a-1) \neq 0$ (car $a \neq 1$), ainsi $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{C}^2$.
   - $f(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$
   - $f(1, a-1) = (a, a(a-1)) = 0(1,0) + a(1, a-1)$

   Ainsi, $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
4. D'après la formule de changement de base $C = PDP^{-1}$ avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}$, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} C^p = PD^pP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^p \end{pmatrix} \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} 1 & a^p \\ 0 & (a-1)a^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a-1} \begin{pmatrix} a-1 & a^p - 1 \\ 0 & (a-1)a^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{a^p-1}{a-1} \\ 0 & a^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

5. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soient $(M, M', \lambda) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2 \times \mathbb{C}$, alors par distributivité du produit matriciel,

$$\phi_A(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') = \lambda AM + AM' = \lambda \phi_A(M) + \phi_A(M')$$

Ainsi, ϕ_A est linéaire.

6. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$, par associativité du produit matriciel,

$$\phi_{AB}(M) = (AB)M = A(BM) = A(\phi_B(M)) = \phi_A(\phi_B(M)) = (\phi_A \circ \phi_B)(M)$$

Ainsi, ϕ_{AB} et $\phi_A \circ \phi_B$ sont deux applications définies sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ qui prennent la même image en tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, dès lors $\phi_{AB} = \phi_A \circ \phi_B$

7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Supposons A inversible, alors d'après la question précédente, $\phi_A \circ \phi_{A^{-1}} = \phi_{A \times A^{-1}} = \phi_{I_n} : M \mapsto I_n \times M$, ainsi, $\phi_A \circ \phi_{A^{-1}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, de même $\phi_{A^{-1}} \circ \phi_A = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$, ceci prouve que ϕ_A est un automorphisme. Réciproquement, si ϕ_A est un automorphisme, alors il est surjectif, ainsi I_n admet un antécédent par ϕ_A noté $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc $I_n = \phi_A(B) = AB$, or, d'après le cours, comme A est une matrice carrée, nécessairement A est inversible.

8. • $\phi_A\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
   • $\phi_A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
   • $\phi_A\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\a&0\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$
   • $\phi_A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&a\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$

   Ainsi, $F=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&a&0\\0&0&0&a\end{pmatrix}$

9. Pour $z\in\mathbb{C}$, $M-zI_4$ est une matrice triangulaire supérieure, ainsi son déterminant vaut le produit des éléments de la diagonale, ainsi, $\det(M-zI_4)=(z-1)^2(z-a)^2$, ainsi, les $z\in\mathbb{C}$ tels que $M-zI_4$ ne soit pas inversibles sont exactement $z=1$ et $z=a$.

10. • $F-I_4=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&a-1&0\\0&0&0&a-1\end{pmatrix}$, notons C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de $F-I_4$, alors $\mathrm{rg}(F-I_4)=\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3,C_4)$, comme C_1 et C_2 sont nulles, $\mathrm{rg}(F-I_4)=\mathrm{rg}(C_3,C_4)=2$ (car C_3 et C_4 sont non colinéaires).
    • $F-aI_4=\begin{pmatrix}1-a&0&1&0\\0&1-a&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, notons C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de $F-aI_4$, alors $\mathrm{rg}(F-aI_4)=\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3,C_4)$, comme $C_1=(1-a)C_3$ et $C_2=(1-a)C_4$, $\mathrm{rg}(F-I_4)=\mathrm{rg}(C_3,C_4)=2$ (car C_3 et C_4 sont non colinéaires).

11. Si $G\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\dim(\mathrm{Ker}(G))+\mathrm{rg}(G)=p$ (nombre de colonnes de G).

12. • D'après le théorème du rang pour les matrices $\dim(\mathrm{Ker}(F-I_4))+\mathrm{rg}(F-I_4)=4$, donc $\mathrm{Ker}(F-I_4)$ est de dimension 2. En notant C_1, C_2, C_3 et C_4 ses colonnes, on a $C_1=0$ donc $1C_1+0C_2+0C_3+0C_4=0$, ainsi $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ est dans le noyau de $\mathrm{Ker}(F-I_4)$, de même, $C_2=0$, ainsi $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ est dans le noyau de $\mathrm{Ker}(F-I_4)$, on a ainsi deux vecteurs non colinéaires appartenant au noyau qui est de dimension 2, ainsi $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(F-I_4)$
    • D'après le théorème du rang pour les matrices $\dim(\mathrm{Ker}(F-aI_4))+\mathrm{rg}(M-aI_4)=4$, donc $\mathrm{Ker}(F-aI_4)$ est de dimension 2. En notant C_1, C_2, C_3 et C_4 ses colonnes, on a $C_1=(1-a)C_3$ donc $1C_1+0C_2+(a-1)C_3+0C_4=0$, ainsi $\begin{pmatrix}1\\0\\a-1\\0\end{pmatrix}$ est dans le noyau de $\mathrm{Ker}(F-aI_4)$, de même, $C_2=(1-a)C_4$, ainsi $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\a-1\end{pmatrix}$ est dans le noyau de $\mathrm{Ker}(M-I_4)$, on a ainsi deux vecteurs non colinéaires appartenant au noyau qui est de dimension 2, ainsi $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\a-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\a-1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(F-aI_4)$

13. Par linéarité, la matrice de $\phi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}$ dans $\mathscr{C}$ est $F - I_4$, ainsi, $M \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(M)$ réalise un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(\phi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})$ vers $\mathrm{Ker}(F - I_4)$, et donc l'isomorphisme réciproque transforme une base de $\mathrm{Ker}(F - I_4)$ en une base de $\mathrm{Ker}(\phi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})$, ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\phi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})$, de même $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a-1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\phi_A - a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})$
14. $\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{C}') = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = 1^2(a-1)^2 \neq 0$ (déterminant d'une matrice triangulaire supérieure), ainsi $\mathscr{C}'$ est une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$
15. Posons $(E_1, E_2, E_3, E_4) = \mathscr{C}'$:
    - $E_1 \in \mathrm{Ker}(\phi_A - \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})$, $\phi_A(E_1) - E_1 = 0_2$ donc $\phi_A(E_1) = E_1 = 1E_1 + 0E_2 + 0E_3 + 0E_4$
    - De même $\phi_A(E_2) = E_2 = 0E_1 + 1E_2 + 0E_3 + 0E_4$.
    - En revanche, $E_3 \in \mathrm{Ker}(\phi_A - a\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})})$, $\phi_A(E_3) - aE_3 = 0_2$ donc $\phi_A(E_3) = aE_3 = 0E_1 + 0E_2 + aE_3 + 0E_4$
    - De même $\phi_A(E_4) = aE_4 = 0E_1 + 0E_2 + 0E_3 + aE_4$

    Ainsi : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}'}(\varphi_A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
16. En notant Δ la matrice déterminée à la question précédente, on a $F = P\Delta P^{-1}$ avec $P = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$ la matrice de changement de base de $\mathscr{C}$ vers $\mathscr{C}'$
17. On reprend $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ quelconque, déterminer le déterminant de l'endomorphisme ϕ_A en fonction de celui de la matrice A.

Encore un exercice de boules et billes

1. Il y a initialement n billes roses sur un total de $n+1$ billes indiscernables, ainsi $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{n}{n+1}$
2. Soit A_1, $A_2, \dots, A_n$ un système complet d'évènements et B un évènement, alors

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \cap B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)$$

3. Le deuxième tirage survient après le premier, mais le premier a pu donné une boule rose ou verte, ainsi R_1 et $\overline{R_1}$ forment un système complet d'évènements, ainsi d'après la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|\overline{R_1})\mathbb{P}(\overline{R_1})$$

   - $\mathbb{P}(R_1) = \dfrac{n}{n+1}$ (d'après la question 1)
   - Si on sait que l'évènement R_1 s'est produit, alors il reste $n-1$ billes roses sur un total de n donc $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \dfrac{n-1}{n}$.
   - Si on sait que l'évènement $\overline{R_1}$ s'est produit, alors c'est qu'on a tiré la bille vert, alors il reste n billes roses sur un total de n donc $\mathbb{P}(R_2|\overline{R_1}) = 1$
   - $\mathbb{P}(\overline{R_1}) = 1 - \mathbb{P}(R_1) = 1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

$$\mathbb{P}(R_2) = \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1} \times 1 = \frac{n}{n+1}$$

4. D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2)} = \mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{n-1}{n}$$

5. Présentons deux méthodes :
   - Si les évènements R_1, R_2, …, R_{n+1} étaient indépendants, alors en particulier R_1 et R_2 le serait et on aurait $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \mathbb{P}(R_2)$ ce qui n'est pas le cas d'après les calculs de la question 3.
   - Si les évènements R_1, R_2, …, R_n étaient indépendants, alors en particulier R_1 et R_2 le serait ainsi que $\overline{R_1} \cap \overline{R_2}$. Or, $\mathbb{P}(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$ (on ne peut pas tirer la bille verte au premier et au deuxième tirage car il n'y a pas de remise), tandis que $\mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2) \neq 0$

   Ainsi, $R_1, R_2, \ldots, R_{n+1}$ ne sont pas indépendants

On note X la variable aléatoire indiquant lors de quel tirage on a tiré la bille verte, alors $X(\Omega) = [\![1\,; n+1]\!]$.

6. L'évènement $(X = j)$ signifie que tous les tirages avant le j-ième avait donné des boules roses et le j-ième la boule verte soit : $(X = j) = \left(\bigcap_{k=1}^{j-1} R_k\right) \bigcap \overline{R_j}$
7. Soit A_1, A_2, …, A_n des évènements, alors
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathbb{P}(A_1) \prod_{k=2}^{n} \mathbb{P}\left(A_k | \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right)\right)$$
8. En appliquant la formule des probabilités composées, on trouve que $\mathbb{P}(X = j) = \dfrac{1}{n+1}$, ainsi X suit une loi uniforme sur $[\![1\,; n+1]\!]$.

Un exercice mortel pour les tueurs/tueuses

Soit $K \in \mathscr{P}([\![1\,; n]\!])$, pour $k \in K$, on pose $B_i = A$ et pour $k \in [\![1\,; n]\!] \backslash K$, on pose $B_k = \overline{A_k}$, alors $B_1, \ldots, B_n$ sont indépendants (d'après le cours), en particulier, $\mathbb{P}(\bigcap_{k=1}^{n} B_k) = \prod_{k \in K}^{\mathbb{P}} (B_k)$, ainsi,
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k \in K} A_k \bigcap \bigcap_{k \in [\![1\,; n]\!] \backslash K} \overline{A_k}\right) = \prod_{k \in K} \mathbb{P}(A_k) \prod_{k \in [\![1\,; n]\!] \backslash K} (1 - \mathbb{P}(A_k)) > 0$$
Or, si $A = \varnothing$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$, par contraposée, on en déduit que $\bigcap_{k \in K} A_k \bigcap \bigcap_{k \in [\![1\,; n]\!] \backslash K} \overline{A_k}$ n'est pas vide. Ainsi, il existe $x_K \in \bigcap_{k \in K} A_k \bigcap \bigcap_{k \in [\![1\,; n]\!] \backslash K} \overline{A_k}$ et ce pour tout $K \subset [\![1\,; n]\!]$. Ceci veut dire que si $k \in K$, $x_K \in A_k$ et si $k \in [\![1\,; n]\!] \backslash K$, alors $x_K \notin A_k$.

Ainsi, on a définit une application $\varphi \colon \begin{cases} \mathscr{P}([\![1\,; n]\!]) \longrightarrow \Omega \\ K \longmapsto x_K \end{cases}$. Montrons que φ est injective. Soit K et K' deux éléments de $\mathscr{P}([\![1\,; n]\!])$. Supposons que $x_K = x_{K'}$. Soit $k \in K$, alors $x_{K'} = x_K \in A_k$ donc $k \in K'$ ceci montre que $K \subset K'$. En inversant les rôles de K et K', on obtient l'autre inclusion. Ainsi, φ est injective. Dès lors, $|\Omega| \geqslant |\mathscr{P}([\![1\,; n]\!])| = 2^n$.