Colles semaine du 5 janvier

Une maîtrise incomplète du cours ainsi que du calcul élémentaire ne peut amener à une note supérieure à 7.

I Démonstration et définition exigibles

L'énoncé exact ainsi que la démonstration de chacun des points suivants sont attendus.

1. Soit $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$. Si Q est un polynômes non constant, $\mathbf{deg}(P\circ Q)=\mathbf{deg}(P)\times\mathbf{deg}(Q)$. (Proposition 2 5) Ch11)
2. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. (Théorème 3 Ch11)
3. Caractérisation des racines avec la divisibilité (Proposition 5, Ch11)
4. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 (Combiner Exo 8 et Proposition 8, Ch11).
5. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif (Combiner Exo 8 et Proposition 8, Ch11).
6. Si $(P,Q)\in\mathbb{K}_n[X]^2$ coïncident en $n+1$ points, alors $P=Q$. (Proposition 9 Ch11)

II Programme

Calcul matriciel

- Matrices à coefficients dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et $\mathbb{K}=\mathbb{C}$: définition, vocabulaire. Addition de matrices, multiplication par un scalaire. Transosition.
- Produit matriciel : définition, non-commutativité, $\big(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\times\big)$ n'est pas intégre (formulation HP).
- Matrices élémentaires, matrices d'opérations élémentaires (dilatation, transposition, transvection). Effet de la multiplication à gauche/droite par une matrice d'opérations élémentaires.
- Matrices carrées : matrices diagonales, triangulaires inférieures/supérieures, symétriques, antisymétriques. Puissance de matrices. Matrices nilpotentes, indice de nilpotence. Matrices commutantes, binôme de Newton.
- Matrices carrées : inversibilité. Définition, propriété, critère de non inversibilité, critère du noyau. Inverse d'une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
- Méthode du pivot de Gauss. Écriture matricielle d'un système linéaire, résolution. Systèmes carrés : système de Cramer, notion de **rang d'un système** **À l'attention des colleurs : nous n'avons pas parlé de rang de matrices.**

Polynômes

- Définition naïve de $\mathbb{K}[X]$ pour $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Polynôme nul, degré, ensembles $\mathbb{K}_n[X]$, propriété du degré. Polynômes constants, monômes, polynômes unitaires.
- Égalité de deux polynômes.
- Opérations usuelles, polynôme dérivé.
- Racines de **fonctions polynômiale**
- Divisibilité, division euclidienne. Caractérisation des racines avec la divisibilité.
- Multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité.
- Polynôme irréductibles : polynômes scindés, scindés à racines simples, irréductibles. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$.
- Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation de polynômes en produit d'irréductibles.
- Relations coefficients-racines.
- Décomposition en éléments simples : pôles d'une fraction rationnelle, décomposition d'une fraction à pôles simples.