

Colles semaine du 12 janvier



Une maîtrise incomplète du cours ainsi que du calcul élémentaire ne peut amener à une note supérieure à 7.

I Démonstration et définition exigibles

L'énoncé exact ainsi que la démonstration de chacun des points suivants sont attendus.

1. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. (Théorème 3 Ch11)
2. Caractérisation des racines avec la divisibilité (Proposition 5, Ch11)
3. Savoir donner la définition d'une limite finie/infinie en un point/en $\pm\infty$ d'une fonction f définie sur un intervalle I à l'aide de quantificateurs, donner un dessin ainsi que la négation à l'aide de quantificateurs (Def 1, 2, 3 Ch 13).
4. Théorème de point fixe (Proposition 6 Ch 13).
5. Composition de limites (Proposition 4)
6. Toute fonction lipschitzienne sur un intervalle I est continue sur cet intervalle (Prop 10 Ch 13).

II Programme

Polynômes

- Définition naïve de $\mathbb{K}[X]$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .
- Polynôme nul, degré, ensembles $\mathbb{K}_n[X]$, propriété du degré. Polynômes constants, monômes, polynômes unitaires.
- Égalité de deux polynômes.
- Opérations usuelles, polynôme dérivé.
- Racines de **fonctions polynômiale**
- Divisibilité, division euclidienne. Caractérisation des racines avec la divisibilité.
- Multiplicité d'une racine. Caractérisation de la multiplicité.
- Polynôme irréductibles : polynômes scindés, scindés à racines simples, irréductibles. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, de $\mathbb{R}[X]$.
- Théorème de d'Alembert-Gauss. Factorisation de polynômes en produit d'irréductibles.
- Relations coefficients-racines.
- Décomposition en éléments simples : pôles d'une fraction rationnelle, décomposition d'une fraction à pôles simples.

Limites et continuité

- Intérieur d'un intervalle.
- Limite finie d'une fonction en un point, en $\pm\infty$. Unicité de la limite.
- Limite infinie d'une fonction en un point, en $\pm\infty$.
- Notion de voisinage d'un point, notion de voisinage de $\pm\infty$.
- Définition de limites à l'aide de voisinages. *À l'attention des colleurs : notion hors programme, exercices faciles.*
- Limite finie implique bornée sur un voisinage.
- Limites à gauche/droite d'un point.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Opérations usuelles sur les limites. Composition de limites. Propriétés usuelles (PLI, encadrement, comparaison, limite monotone).
- Continuité en un point. Continuité à gauche/droite. Caractérisation séquentielle de la continuité. Opération usuelles sur les fonctions continues en un point.
- Suites récurrentes et points fixes.
- Prolongement par continuité en un point.
- Continuité sur un intervalle : définition, opérations usuelles.
- Fonctions lipschitziennes.
- *À l'attention des colleurs : pas de TVI, pas de bornes atteintes cette semaine.*