Colles semaine du 26 janvier

Une maîtrise incomplète du cours ainsi que du calcul élémentaire ne peut amener à une note supérieure à 7.

I Démonstration et définition exigibles

L'énoncé exact ainsi que la démonstration de chacun des points suivants sont attendus.

1. Savoir expliquer la méthode de la dichotomie et donner son implémentation en Python (**énoncé** du théorème des valeurs intermédiaires + déf 12+ programme Python).
2. Si E est $\mathbb{K}$-espace vectoriel, l'intersection de deux s.e.v de E est un s.e.v. De même, l'intersection d'une famille de s.e.v de E est un s.e.v (Proposition 3, Ch 13).
3. Propriétés de la somme de deux s.e.v. (Proposition 5, Ch 13).
4. Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $G = \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont des s.e.v supplémentaires de E (combiner exo 1.5, exo 7 et exo 8, Ch 13).
5. Soit $\mathscr{L} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une famille de vecteurs de E et $x \in E$. La famille $\mathscr{L} \cup \{x\}$ est libre si, et seulement si, $x \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. (Théorème 1 Ch 13).
6. Toute famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ non nuls de degrés deux à deux distincts est libre. (Théorème 2 Ch 13).

II Programme

Limites et continuité

- Intérieur d'un intervalle.
- Limite finie d'une fonction en un point, en $\pm\infty$. Unicité de la limite.
- Limite infinie d'une fonction en un point, en $\pm\infty$.
- Notion de voisinage d'un point, notion de voisinage de $\pm\infty$.
- Définition de limites à l'aide de voisinages. *À l'attention des colleurs : notion hors programme, exercices faciles.*
- Limite finie implique bornée sur un voisinage.
- Limites à gauche/droite d'un point.
- Caractérisation séquentielle de la limite.
- Opérations usuelles sur les limites. Composition de limites. Propriétés usuelles (PLI, encadrement, comparaison, limite monotone).
- Continuité en un point. Continuité à gauche/droite. Caractérisation séquentielle de la continuité. Opération usuelles sur les fonctions continues en un point.
- Suites récurrentes et points fixes.
- Prolongement par continuité en un point.
- Continuité sur un intervalle : définition, opérations usuelles.
- Fonctions lipschitziennes.
- TVI et principe de dichotomie.
- Image d'un intervalle par une fct continue. Théorème des bornes atteintes. Théorème de la bijection.
- Extension de la continuité aux fonctions définies sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$: traduction à l'aide des parties réelles et imaginaires. Limite finie implique bornée au voisinage. Opérations usuelles. Image d'un segment.

Espaces vectoriels

- Définition de $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Espaces vectoriels usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{R}}$, E^{Ω} où Ω est un ensemble quelconque et E un $\mathbb{K}$-e.v.
- Premières propriétés : unicité du vecteur nul, de l'opposé, produit nul.
- Sous-espaces vectoriels : définition. Un s.e.v est un e.v. Exemples usuels.
- Notion de combinaison linéaire. Intersection de s.e.v. Espace vectoriel engendré.
- Somme de deux s.e.v. Supplémentaires.
- Familles finies d'un e.v : familles libres, génératrices.
- Bases, vecteur coordonnée d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B}$. Concaténation des bases, base adaptée.
- **À l'attention des colleurs : pas de notion de dimension pour le moment !**