

🌿 Colles semaine du 30 mars 🌿



Une maîtrise incomplète du cours ainsi que du calcul élémentaire ne peut amener à une note supérieure à 7.

I Démonstration et définition exigibles

L'énoncé exact ainsi que la démonstration de chacun des points suivants sont attendus.

1. Caractérisation de la dimension d'un sous-espace vectoriel (Proposition 4 Ch 17).
2. Théorème du rang version géométrique (énoncé + démo du Théorème 11 Ch 17) + **énoncé seulement** du théorème du rang (Théorème 12 Ch17).
3. Équation d'un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ (Proposition 20 Ch17).
4. L'application $\phi: x \in E \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme (Propriété 1 Ch18)
5. Dimension de l'ensemble des applications linéaires de E dans F . (Proposition 1 Ch18)
6. Formule de changement de bases pour un vecteur (Proposition 6 Ch18)

II Programme

Espaces vectoriels de dimension finie

- Définition de la dimension finie. Propriété des familles génératrices/libres. Théorème de l'échange.
- Existence d'une base en dimension finie. Théorème de la base incomplète. Théorème de la base extraite.
- Dimension d'un espace vectoriel, dimension d'espaces usuels. L'espace vectoriel de dimension nulle.
- Dimension et familles libres/génératrices.
- Sous-espaces vectoriels en dimension finie. Propriétés. Formule de Grassmann. Caractérisation dimensionnelle de la somme directe.
- Applications linéaires en dimension finie. Bases et image d'une application linéaire. Caractérisation des appli. lin. en dim. finie.
- Condition d'égalité entre deux appli. lin.
- Espaces isomorphes : définition, caractérisation par la dimension. Les isomorphismes conservent le rang.
- Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$ pour E et F deux $\mathbb{K}$ -e.v de dim. finie.
- Rang d'une application linéaire. Application de rang nul. Rang et composition. Théorème du rang (géométrique, classique). Surjectivité/injectivité/bijektivité et rang. Isomorphisme et dimension.
- Hyperplans. Définition. Caractérisation avec la dimension, avec supplémentaire, avec forme linéaire non nulle. Équation d'un hyperplan.

Matrices : applications et systèmes linéaires

- Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
- Matrices d'applications linéaires. Lien entre calcul de $u(x)$ et AX où $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$.
- Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- Matrice de la composée, matrice d'isomorphisme, cas des endomorphismes.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Matrices de changement de bases : inversibilité, formule de changement de base pour un vecteur, pour une application linéaire. Cas particulier des endomorphismes, matrices carrées semblables.
- Noyau, image et rang d'une matrice : définition, lien avec les applications linéaires codées par une matrice donnée. Propriétés du rang et de l'image.
- Calcul du rang par échelonnement de la matrice : invariance du rang par opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes (savoir donner les formules de matrices d'opérations élémentaires!)
- Méthode : détermination de l'image et du noyau par opérations élémentaires sur les colonnes uniquement.
- Caractérisation des matrices inversibles par le noyau/l'image/le rang.
- Retour sur les systèmes linéaires.