
🌿 Colles semaine du 1er juin 🌿



Une maîtrise incomplète du cours ainsi que du calcul élémentaire ne peut amener à une note supérieure à 7.

I Démonstration et définition exigibles

L'énoncé exact ainsi que la démonstration de chacun des points suivants sont attendus.

1. Une loi de probabilité est entièrement caractérisée par sa distribution de probabilité (Théorème 2 Ch23).
2. L'application \mathbb{P}_A où A est un évènement est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ (Définition 7 Ch23).
3. Formule des probabilités composée (Théorème 4 Ch23).
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz (Théorème 1 Ch24).
5. Liberté d'une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul (Proposition 2 Ch24)
6. Projection orthogonale sur un sev de dimension finie : existence et expression. (Théorème 3 Ch24).

II Programme

Introduction aux probabilités

- Notion d'expérience aléatoire et d'issues.
- Univers Ω , évènement, ensemble de tous les évènements $\mathcal{P}(\Omega)$. Espace probabilisable. Évènements élémentaires, évènement certain/impossible. Évènement réalisé.
- Intersection/union d'évènements. Évènements incompatibles. Évènements contraires/complémentaires.
- Système complet d'évènements.
- Probabilité sur un univers **fini**. Espace probabilisé fini. Propriétés usuelles d'une probabilité.
- Formule du crible de Poincaré. (HP : famille à $n > 3$ évènements, mais cela vaut le coup de l'apprendre...)
- Majoration de la probabilité d'une union finie d'évènements.
- Construction d'une probabilité : distribution de probabilité, théorème d'existence et d'unicité. Exemple de la probabilité uniforme et notion d'équiprobabilité.
- Probabilité conditionnelle : rappels sur les arbres, loi des noeuds. Définition d'une probabilité conditionnelle. Formule des probabilités composées, formule de Bayes.
- Formule des probabilités totales, lien avec formule de Bayes.
- Indépendance de deux évènements. Indépendance d'une famille finies d'évènements. Passage à l'intersection, à l'union, au complémentaire.

Espaces préhilbertiens réels

- Produit scalaire sur un espace vectoriel. Espace préhilbertien, espace euclidien. Exemples de produits scalaires usuels.
- Norme associée à un produit scalaire. Propriétés usuelles, identité du parallélogramme, formule de polarisation, inégalité de Cauchy-Schwarz + exemple sur $C^0([a, b])$, sur R^n . Inégalité triangulaire.
- Vecteurs orthogonaux. Famille orthogonale. Théorème de Pythagore.
- Sous-espaces orthogonaux. Orthogonal d'une partie. Propriétés, sommes directes.
- Familles orthonormées/orthonormales. Orthonormalisation de Gram-Schmidt (pour les colleurs : pas de démo théorique!)
- Projection orthogonale sur sev de dimension finie. Minimisation de la distance à un sev.
- Espaces euclidiens : théorème de la base incomplète orthonormée. Dimension du supplémentaire orthogonal. Orthogonal à un hyperplan, distance à un hyperplan. Distance à une droite.