

**Du 17 Février au 28 Février :****Ensembles et applications**

- Ensemble, élément, appartenance. Sous-ensembles, inclusion, égalité de deux ensembles. Ensemble des parties. Cardinal d'un ensemble. Opérations sur les ensembles : union, intersection, complémentaire. Produit cartésien.
- Applications. Ensemble de définition, d'arrivée, image, antécédent, graphe. Application composée. Fonction indicatrice. Restriction et prolongement. Image directe, réciproque.

**Calcul matriciel et systèmes linéaires**

- Ensemble  $M_{n,p}(\mathbb{K})$  des matrices à  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Opérations sur les matrices et propriétés. Application à l'écriture matricielle d'un système linéaire.
- Puissances d'une matrice carrée. Formule du binôme. Matrices diagonales, triangulaires.
- Matrices élémentaires. Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan.
- Matrice identité, matrice scalaire. Formule du binôme. Application au calcul de puissances. Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.
- Matrices carrées inversibles. Inverse. Groupe linéaire.
- Transposée d'une matrice : opérations. Matrices symétriques et antisymétriques.

**Démonstrations de cours exigibles :**

1. Déf image directe/réciproque +  $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$  ou  $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ .
2. Déf application injective, surjective, bijective (toutes les def possibles)
3. La composée d'applications injectives (resp. surjectives, resp. bijectives) est injective (resp. surjective, resp. bijective).
4. Si  $g \circ f$  est injective (resp. surjective) alors  $f$  est injective (resp  $g$  surjective).
5. Propriétés du produit matriciel (+coefficient  $(i, j)$  de la matrice produit) + expliquer quelques méthodes pour calculer les puissances d'une matrice, puis traiter au choix (de la colleuse ou colleur)  $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$ ;  $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

6. Déf inverse d'une matrice + Propriétés + Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$  et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & \frac{-3}{2} \\ -1 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \text{ via le pivot de Gauss puis expliquer rapidement la méthode du}$$

$$\text{polynôme annulateur } (X^2 - 2X - 1) \text{ sur } A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Définition de la transposée, propriétés + dem de la tranposée d'un produit.
8. Exercice :  $\forall M \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K}), \exists!(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{K}), M = S + A$ .

**Remarque : toutes les définitions, énoncés du cours doivent être parfaitement connus.**

Note aux colleuses, colleurs : les étudiantes et étudiants doivent :

- Montrer l'égalité, l'inclusion entre deux ensembles.
- Montrer qu'une application est injective, surjective, bijective
- Déterminer l'ensemble des parties d'un ensemble, l'image directe, réciproque de sous-ensembles par une application ;
- Calculer la tranposée, des produits, des puissances et des inverses de matrices

Merci de votre collaboration.