ENAC EPL/S Mathématiques 2023

Durée : 2 Heures

Tout Dispositif Électronique est Interdit

(en particulier l'usage de la calculatrice)

Chaque candidat devra choisir au plus 24 questions parmi les 36 proposées.

Il est inutile de répondre à plus de 24 questions : le logiciel de correction lira les réponses en séquence en partant de 1, et s'arrêtera de lire lorsqu'il aura détecté des réponses à 24 questions, quelle que soit la valeur de ces réponses.

Chaque question comporte au plus deux réponses exactes.

Toutes les questions sont indépendantes les unes des autres

$\wedge$ et $\vee$ désignent respectivement les connecteurs positionnels « et » et « ou » et $\exists!$ signifie : « il existe un ou une unique... ». Pour une proposition $A(x)$ dépendant d'une variable x on note $\neg A(x)$ sa négation.

Question 1 : Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

A) La négation de $\Big(\exists x \in E,\ A(x)\Big) \Rightarrow \Big(\forall x \in E,\ A(x)\Big)$ est $\Big(\exists x \in E,\ A(x)\Big) \wedge \Big(\exists x \in E,\ \neg A(x)\Big)$.

B) La négation de $\Big(\exists x \in E,\ A(x)\Big) \Rightarrow \Big(\forall x \in E,\ A(x)\Big)$ est $\Big(\exists x \in E,\ A(x)\Big) \vee \Big(\exists x \in E,\ \neg A(x)\Big)$.

C) La négation de $\forall N \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \leqslant N$ est $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N$.

D) La négation de $\exists! x \in \mathbb{R},\ x = x^2$ est $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq x^2$.

Question 2 : Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

A) $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$

B) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$

C) $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$

D) $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y^2 = 1$

Question 3 : Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et les assertions P, Q, R suivantes :

$$P : (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)\,, \qquad Q : (\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0)\,, \qquad R : (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0) \vee (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < 0)$$

Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

A) $\neg R \Rightarrow Q$

B) $\neg Q \Rightarrow \neg P$

C) $\neg P \Rightarrow \neg R$

D) $Q \Rightarrow R$

Question 4 : Sélectionner la/les assertion(s) vraie(s) :

A) Une restriction au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
B) Une restriction au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.
C) Une prolongement au départ d'une fonction injective est une fonction injective.
D) Une prolongement au départ d'une fonction surjective est une fonction surjective.

Question 5 : soient f et g deux applications $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par :
$f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $g(n) = \dfrac{n}{2}$ si n est pair, $g(n) = 0$ sinon.

A) f est bijective.
B) g est bijective.
C) $f \circ g$ est bijective.
D) $g \circ f$ est bijective.

Question 6 : la fonction f définie par $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{2\sqrt{x-1}}{x}\right)$ est dérivable sur :

A) $[1;+\infty[$
B) $]1;+\infty[$
C) $]1;2[\cup]2;+\infty[$
D) $[2;+\infty[$

Question 7 : a et b étant deux réels, l'ensemble des solutions du système $\left\{\begin{array}{l} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{array}\right.$ est :

A) Un singleton si $a = 1$ et $b = 1$
B) Infini si $a \neq 1$ et $b = 0$
C) Infini si $a = -2$ et $b = -2$
D) Vide si $a \neq -2$, $a \neq 1$ et $b \neq 0$

Question 8 : soit $S = \{\theta \in \mathbb{R} | \sin(\theta) \neq 0\}$: pour $\theta \in D$ on note $\operatorname{cotan}(\theta) = \dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$ et i est le nombre complexe tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. Pour tout $\theta \in D$, l'ensemble S des $z \in \mathbb{C}$ tel que $\dfrac{\mathrm{i}-z}{\mathrm{i}+z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est

A) $S = \left\{\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) i\right\}$
B) $S = \left\{\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right) i\right\}$
C) $S = \left\{\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right\}$
D) $S = \left\{\operatorname{cotan}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\right\}$

Question 9 : après calculs, nous trouvons :

A) $\sin(5\theta) = 32\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta)$
B) $\sin(5\theta) = 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 3\sin(\theta)$
C) $\sin(5\theta) = 16\sin^5(\theta) - 10\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta)$
D) $\sin(5\theta) = 16\sin^5(\theta) - 20\sin^3(\theta) + 5\sin(\theta)$

Question 10 : l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $2xy' - 3y = \sqrt{x}$ sur $[0, +\infty[$ est

A) $S = \left\{x \mapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
B) l'ensemble vide
C) $S = \left\{x \mapsto x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right\}$
D) $S = \left\{x \mapsto \lambda x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

Question 11 : l'égalité suivante est vraie :

A) $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + x^2\right) \mathrm{d}x = \ln(2) + \frac{\pi}{2}$
B) $\displaystyle\int_0^1 \ln\left(1 + x^2\right) \mathrm{d}x = \ln(2) - 2$
C) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{3}$
D) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x + 1}} \mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Question 12 : dans $\mathbb{R}$ l'équation $3^x + 4^x = 5^x$ admet :

A) Exactement trois solutions
B) Exactement deux solutions
C) Une unique solution.
D) Aucune solution.

Question 13 : en utilisant la dérivée première puis la dérivée seconde de f définie par $f(x) = (1 + x)^n$ nous obtenons

A) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n(n+1) \times 2^{n-2}$
B) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n \times 2^{n-1}$
C) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \times 2^{n}$
D) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1) \times 2^{n-2}$

Question 14 : nous rappelons que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. L'égalité suivante est vraie :

A) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(3n+5)}{6}$

B) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} (i+j)^2 = \frac{n(n+1)(7n+5)}{6}$

C) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} (i+j)^2 = \frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}$

D) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} (i+j)^2 = \frac{n(n+1)(7n+5)}{3}$

Question 15 : dans $\mathbb{R}$, l'équation $\dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|x+1|} = 1$ admet :

A) Aucune solution

B) Une unique solution

C) Exactement deux solutions

D) Exactement trois solutions

Question 16 : l'ensemble S des solutions dans $\mathbb{N}^2$ du système $\begin{cases} PGCD(x,y) = 5 \\ PPCM(x,y) = 60 \end{cases}$ est composé de :

A) 6 couples solutions

B) 4 couples solutions

C) 2 couples solutions

D) 1 couple solution

Question 17 : nous définissons les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n, & a_0 = 1 \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n, & b_0 = 2 \\ c_{n+1} = 3c_n, & c_0 = 7 \end{cases}$$

Après calculs de la puissance d'une certaine matrice nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

A) $\begin{cases} a_n = 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n = 2 \times 3^n + 7n \times 3^{n-1} \\ c_n = 7 \times 3^n \end{cases}$

B) $\begin{cases} a_n = 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n = 2 \times 3^n + 7n \times 3^n \\ c_n = 7 \times 3^n \end{cases}$

C) $\begin{cases} a_n = 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n(n-1)}{2} \\ b_n = 2 \times 3^n + 7n \times 3^{n-1} \\ c_n = 7n \times 3^n \end{cases}$

D) $\begin{cases} a_n = 3^n + 2n \times 3^{n-1} + 7 \times 3^{n-2} \times \frac{n}{2} \\ b_n = 2 \times 3^n + 7n \times 3^{n-1} \\ c_n = 7 \times 3^n \end{cases}$

Question 18 : $\forall m \in \mathbb{R},\ M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ m & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et on note $\mathrm{rg}(M)$ le rang de M.

A) Il existe un seul nombre réel m pour lequel $\mathrm{rg}(M) = 2$
B) Il existe exactement trois nombres réels m pour lequel $\mathrm{rg}(M) = 2$.
C) Pour tous les nombres réels m, $\mathrm{rg}(M) = 3$.
D) Pour tous les nombres réels m privés d'un seul nombre, $\mathrm{rg}(M) = 3$.

Question 19 : la famille formée des vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ est libre :

A) $x_1 = (1; 0; 1)$ et $x_2 = (1; 2; 2)$
B) $x_1 = (1; 0; 0)$, $x_2 = (1; 1; 0)$ et $x_3 = (1; 1; 1)$
C) $x_1 = (1; 2; 1)$, $x_2 = (2; 1; -1)$ et $x_3 = (1; -1; -2)$
D) $x_1 = (1; -1; 1)$, $x_2 = (2; -1; 3)$ et $x_3 = (-1; 1; -1)$

Question 20 : soit $F = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + 3z = 0\}$. Un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$ est :

A) $G = \mathrm{Vect}\big((0; 0; 0; 1)\big)$
B) $G = \mathrm{Vect}\big((0; 0; 1; 0)\big)$
C) $G = \mathrm{Vect}\big((0; 1; 0; 0)\big)$
D) $G = \mathrm{Vect}\big((0; 0; 1; 0), (0; 1; 0; 0)\big)$

Question 21 : K est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit E un K-espace vectoriel non réduit à un singleton.

A) Il existe un projecteur p de E tel que $\ker(p) = \mathrm{Im}(p)$.
B) Il existe un projecteur p non nul de E tel que $2p$ soit un projecteur.
C) p et $q = \mathrm{id}_E - p$ étant deux projecteurs de E : $\ker(q) = \mathrm{Im}(p)$
D) Il existe un projecteur p différent de l'identité de E tel que $2\,\mathrm{id}_E - p$ soit un projecteur.

Question 22 : Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y + z = 0\}$ et $L = \mathrm{Vect}\big((1, 2, 3)\big)$ deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
L'image de $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par la symétrie s par rapport à H parallèlement à L est :

A) $s(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z\right)$
B) $s(x, y, z) = \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, -\frac{5}{6}x - \frac{1}{6}y + \frac{1}{6}z\right)$
C) $s(x, y, z) = \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, -\frac{2}{6}x + \frac{1}{6}y - \frac{2}{6}z, -\frac{5}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z\right)$
D) $s(x, y, z) = \left(\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, \frac{5}{6}x - \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}z\right)$

Question 23 : soit la matrice réelle $M = \begin{pmatrix} 1 & m & -1 & m \\ -1 & 1 & -m & -m \\ m & 1 & 1 & m \\ m & -1 & 1 & -m \end{pmatrix}$. M est inversible si et seulement si

A) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$
B) $m \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1; 1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$
C) $m \in \mathbb{R} \setminus \{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$
D) $m \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1 + \sqrt{2}\}$

Question 24 : une urne contient n boules numérotées de 1 à n. Nous les extrayons successivement sans remise. Nous disons qu'il y a rencontre au i-ème tirage si la i-ème boule tirée porte le numéro i.

A) La probabilité qu'il y ait rencontre au i-ème tirage est $\frac{1}{n}$

B) La probabilité qu'il y ait rencontre au i-ème tirage est $\frac{1}{n-1}$

C) Le nombre moyen de rencontres est 2

D) Le nombre moyen de rencontres est 3

> Dans le jeu de 52 cartes de la question qui suit il y a 13 cartes pour chacun edes "couleurs" qui sont carreau, cœur, pique, trèfle. Chaque couleur comporte l'as, les cartes de 2 à 10, et les trois "figures" qui sont le valet, la dame et le roi.

Question 25 : nous tirons une carte dans un jeu de 52 cartes.
Nous appelons D l'événement « la carte tirée est une dame. ». L'assertion suivante est vraie :

A) Soit A l'événement : « la carte est une figure. ». Les événements A et D sont indépendants.

B) Soit A l'événement : « la carte n'est pas un as. ». Les événements A et D sont indépendants.

C) Soit A l'événement : « la carte est la dame de pique. ». Les événements A et D sont indépendants.

D) Soit A l'événement : « la carte est un pique. ». Les événements A et D sont indépendants.

Question 26 : $E = \mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$ et de sa norme associée $\|\cdot\|$.
Soit $u = (4; -1; 2)$: on pose $F = \{v \in E,\ (u|v) = 0\}$. Soit $w \in E$ vérifiant $(u|w) = 2$: on note $\mathrm{d}(w, F)$ la distance de w à F.

A) F est un espace vectoriel de dimension 1

B) $\mathrm{d}(w, F)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\|w\|$ tend vers $+\infty$

C) $\mathrm{d}(w, F) = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$

D) $\mathrm{d}(w, F) = \dfrac{2}{21}$

Question 27 : sélectionner la ou les égalité(s) vraie(s) :

A) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = 0$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = -\infty$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = \dfrac{2}{\pi}$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right) = +\infty$

Question 28 : après avoir trouvé a, b, c, d tels que $\dfrac{1}{x^2(1+x)^2} = \dfrac{a}{1+x} + \dfrac{b}{(1+x)^2} + \dfrac{c}{x} + \dfrac{d}{x^2}$ et sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, nous trouvons :

A) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$

B) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3$

C) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi}{3} - 3$

D) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \pi^2 - 3$

Question 29 : en 0, l'égalité est vraie :

A) $\ln(2+\sin(x)) = \ln(2) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{24} + o(x^3)$

B) $\ln(2+\sin(x)) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{24} + o(x^3)$

C) $\ln(2+\sin(x)) = 2\ln(2) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{24} + o(x^3)$

D) $\ln(2+\sin(x)) = \ln(2) + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{12} + o(x^3)$

Question 30 : Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On pose $a = 2n^3 + n^2 + 2n + 5$ et $b = n^2 + 1$.

A) $PGCD(a, b) = PGCD(b, 3)$

B) $PGCD(a, b) = PGCD(b, 2)$

C) Si n est pair alors $PGCD(a, b) = 1$ et si n est impair alors $PGCD(a, b) = 2$

D) Si n est pair alors $PGCD(a, b) = 2$ et si n est impair alors $PGCD(a, b) = 1$

Question 31 : Nous définissons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ complexe par $u_0 \in \mathbb{C}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}\left(3u_n - 2\overline{u_n}\right)$ où $\overline{u_n}$ désigne le conjugué de u_n. Pour z un complexe, $\mathfrak{Im}(z)$ désigne sa partie imaginaire et $\mathfrak{Re}(z)$ sa partie réelle.

A) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathfrak{Re}\left(u_0\right)$

B) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{i}\mathfrak{Im}\left(u_0\right)$

C) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0$

D) (u_n) n'admet pas de limite en $+\infty$

Question 32 : sélectionner la ou les affirmation(s) vraie(s) :

A) La somme de tous les entiers pairs compris entre 1 et 100 est égale à : 10100.

B) La somme de tous les entiers pairs compris entre 1 et 100 est égale à : 5150.

C) La somme de tous les entiers impairs compris entre 1 et 100 est égale à : 5050.

D) La somme de tous les entiers pairs compris entre 1 et 100 est égale à : 10000.

Question 33 : sélectionner la ou les affirmation(s) vraie(s) :

A) Pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

B) Pour tout entier naturel n non nul, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} < \sqrt{n}-\sqrt{n-1}$

C) Nous en déduisons que pour $n = 10000$ la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ est 99

D) Nous en déduisons que pour $n = 10000$ la partie entière de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est 99

Question 34 : pour $\lambda \in \mathbb{R}$ soient les fonctions $f_\lambda : x \mapsto \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$ de courbes C_λ

A) Toutes les tangentes aux courbes C_λ aux points d'abscisses $x = 1$ sont concourantes.

B) Toutes les tangentes aux courbes C_λ aux points d'abscisses $x = 1$ sont parallèles.

C) Toutes les tangentes aux courbes C_λ aux points d'abscisses $x = 1$ sont confondues.

D) Il n'est pas possible de savoir si toutes les tangentes aux C_λ aux points d'abscisses $x = 1$ sont concourantes, parallèles ou confondues.

Question 35 : soit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{z-2}{z+\mathrm{i}}$ pour $z \neq \mathrm{i}$

A) L'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$ est un cercle.

B) L'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|f(z)| = 1$ est un droite.

C) L'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur est un cercle.

D) L'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $f(z)$ soit imaginaire pur est une droite.

Question 36 : après avoir d'une part étudié la fonction $x \mapsto \arccos(x) - \arcsin(2x)$ et d'autre part simplifié l'expression de $\cos(\arcsin(y))$, nous démontrons que l'équation $\arccos(x) = \arcsin(2x)$:

A) n'admet pas de solution.

B) admet une infinité de solutions.

C) admet une unique solution : $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

D) admet une unique solution : $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.