

Du 30 Mars au 10 Avril 2026 :**Polynômes et fractions rationnelles**

- Ensemble $\mathbb{K}[X]$. Opérations : somme, produit, composée. Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$; coefficient dominant, polynôme unitaire. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$
- Degré d'une somme, d'un produit, d'une composée. Fonction polynomiale.
- Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.
- Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$. Dérivée formelle, dérivée d'un produit, d'une composée. Dérivée k -ième, formule de Leibniz. Formule de Taylor.
- Racines (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité. Multiplicité d'une racine. Caractérisation par les dérivées successives. Polynôme scindé sur \mathbb{K} .
- Décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss.
- Somme et produit des racines d'un polynôme (second degré).
- Expression de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et \mathbb{R} des fonctions rationnelles à **pôles simples en PCSI. Dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.** Application au calcul de primitives, de dérivées k -ièmes.

Analyse asymptotique (début)

- Rappel : Analyse asymptotique sur les suites. Relations de comparaison (domination, négligeabilité, équivalence), notations de Landau. Équivalents usuels.
- Relations de comparaisons. Cas des fonctions.

Remarque : toutes les définitions et énoncés ci-dessus doivent être parfaitement connus, même si elles ne figurent pas dans les questions de cours.

Démonstrations de cours exigibles :

1. Théorème de division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$ (énoncé) + exemple au choix.
2. Formule de Taylor exacte pour les polynômes (dem).
3. Définition du degré d'un polynôme + énoncé des propriétés + calcul $\deg(P)$ et $\text{cd}(P)$ sur $(X^2 + 1)^n - (X^2 - 1)^n$.
4. Énoncé relations coefficients racines : expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients + ex au choix pol de degré 2.
5. Racine d'un polynôme + caractérisation par la divisibilité (dem)
6. Multiplicité d'une racine et caractérisation par les dérivées successives (dem).
7. Théorème de décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ (énoncé) + décomposition de $X^n - 1$.
8. Expression de la décomposition en éléments simples sur \mathbb{C} et \mathbb{R} des fonctions rationnelles à pôles simples + application à $\frac{1}{X^n - 1}$.
9. Relations de comparaison pour les fonctions (def) + équivalents usuels sur les fonctions.
10. Intégration d'un développement limité (dem) + application pour $DL_n(0)$ de arctan.

Note aux colleuses et colleurs : les étudiantes et étudiants doivent :

- Calculer la somme, produit, composée de polynômes, son degré, coefficient dominant.
- Résoudre des équations d'inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$.
- Effectuer la division euclidienne de deux polynômes. Calculer le reste.
- Dériver une ou plusieurs fois la somme, le produit, la composée de polynômes.
- Calculer la multiplicité d'une racine et donner la décomposition en polynômes irréductibles de polynômes dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
- Appliquer la DES à pôles simples pour le calcul de sommes, primitives.
- Utiliser les relations de comparaison sur les fonctions.

Merci de votre collaboration