

**Du 13 Avril au 24 Avril 2026 :****Fractions rationnelles et applications****Analyse asymptotique**

- Rappel : Analyse asymptotique sur les suites. Relations de comparaison (domination, négligeabilité, équivalence), notations de Landau. Équivalents usuels.
- Relations de comparaisons. Cas des fonctions.
- Développements limités. Définitions. Opérations sur les développements limités. Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor Young.
- Application des développements limités : détermination d'équivalents et de limites, prolongement par continuité, dérivabilité, position relative de la tangente, étude d'extremums locaux, détermination d'asymptotes. Problèmes d'analyse asymptotique

**Espaces vectoriels**

- Structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Exemples de référence :  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $M_{n,p}(\mathbb{K})$ , ... Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, caractérisation.
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- Intersection, union de sous-espaces vectoriels. Somme de deux sous-e.v. Somme directe. Caractérisation. Sous-espaces supplémentaires.
- Famille libre, liée. Famille génératrice. Bases, bases canoniques, coordonnées.

**Remarque : toutes les définitions et énoncés ci-dessus doivent être parfaitement connus, et à tout moment, vous devez être capables de les restituer sans aucune hésitation, même si elles ne figurent pas dans les questions de cours.**

**Démonstrations de cours exigibles :**

1. Expression de la décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}$  des fractions rationnelles à pôles simples + application à  $\frac{1}{x^n-1}$ .
2. Relations de comparaison pour les fonctions (def) + équivalents usuels sur les fonctions.
3. Intégration d'un développement limité (dem) + application pour  $DL_n(0)$  de arctan.
4. Formule de Taylor Young (Énoncé) + application à  $x \mapsto (1+x)^\alpha$
5.  $DL_5(0)$  de tan par 2 méthodes (par ex : quotient de DL ou fonction réciproque).
6. Position relative d'une courbe par rapport à sa tangente (des dessins sont les bienvenus et explication sur l'exemple  $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ ).
7. Caractérisation des sous-e.v. (énoncé) + exple :  $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), {}^t M = M\}$ .
8.  $\text{Vect}(\mathcal{F})$  (def) + caractérisation : c'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $\mathcal{F}$  + écrire sous forme de  $\text{Vect}$  :  
 $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0\}$ .
9. Caractérisation sous-espaces supplémentaires (énoncé général) + ex :  
 $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ paire}\}$  et  $\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ impaire}\}$ .
10. Comment montrer qu'une famille est libre ? + cas des polynômes + ex avec (cos, sin) (**à partir de mardi**)

Note aux colleuses et aux colleurs : **Donner 2 DL avant de commencer les exercices**  
 les étudiantes et étudiants doivent savoir :

- Effectuer une DES et calculer des primitives, sommes, dérivées n-ièmes
- Tout sur l'analyse asymptotique
- Démontrer qu'un espace est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Merci de votre collaboration