Du 14 Avril au 25 Avril 2025 :

Analyse asymptotique

- Rappel : Analyse asymptotique sur les suites. Relations de comparaison (domination, négligeabilité, équivalence), notations de Landau. Équivalents usuels.
- Relations de comparaisons. Cas des fonctions.
- Développements limités. Définitions. Opérations sur les développements limités. Primitivation d' un développement limité. Formule de Taylor Young.
- Application des développements limités : détermination d'équivalents et de limites, prolongement par continuité, dérivabilité, position relative de la tangente, étude d'extremums locaux, détermination d'asymptotes.
- Problèmes d'analyse asymptotique

Espaces vectoriels

- Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$, ... Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, caractérisation.
- Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- Intersection, union de sous-espaces vectoriels. Somme de deux sous-e.v. Somme directe. Caractérisation. Sous-espaces supplémentaires.
- Famille libre, liée. Famille génératrice. Bases, bases canoniques, coordonnées.

Remarque : toutes les définitions et énoncés ci-dessus doivent être parfaitement connus, et à tout moment, vous devez être capables de les restituer sans aucune hésitation, même si elles ne figurent pas dans les questions de cours.

Démonstrations de cours exigibles :

1. Formule de Taylor Young (Énoncé) + application à $x \mapsto (1+x)^\alpha$
2. $DL_5(0)$ de tan par 2 méthodes (par ex : quotient de DL ou fonction réciproque).
3. Position relative d'une courbe par rapport à sa tangente (des dessins sont les bienvenus et explication sur l'exemple $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$.
4. Caractérisation des sous-e.v. (énoncé)+ exple : $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), {}^t M = M\}$.
5. Vect($\mathcal{F}$) (def) + caractérisation : c'est le plus petit (pour l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant $\mathcal{F}$ + écrire sous forme de Vect :
   $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x-y+z=0 \text{ et } 2x-y-z=0\}$.
6. Caractérisation sous-espaces supplémentaires (énoncé général) + ex :
   $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ paire }\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ impaire }\}$.
7. Comment montrer qu'une famille est libre ? + argument dans le cas des polynômes + ex avec $(\cos, \sin)$

Note aux colleuses et aux colleurs : **Donner 2 DL avant de commencer les exercices**
les étudiantes et étudiants doivent savoir :

- Tout sur l'analyse asymptotique
- Démontrer qu'un espace est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Montrer que deux sous-e.v. sont en somme directe.
- Montrer que deux sous-e.v. sont supplémentaires dans un e-v.

Merci de votre collaboration