<u>Du 27 Avril au 29 Mai 2026 :</u>

Espaces vectoriels et espaces vectoriels de dimension finie

- Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Exemples de référence : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $M_{n,p}(\mathbb{K})$, ... Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, caractérisation. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs.
- Intersection, union de sous-espaces vectoriels. Somme de deux sous-e.v. Somme directe. Caractérisation. Sous-espaces supplémentaires. Formule de Grassmann
- Famille libre, liée. Famille génératrice. Bases, bases canoniques, coordonnées.
- Espaces vectoriels de dimension finie. Théorème de la base extraite, de la base incomplète.
- Dimension. Dimension des espaces vectoriels de référence. Lien avec base, famille génératrice, libre. Rang d'une famille finie de vecteurs.

Intégration

- Fonctions en escaliers. Intégrale d'une fonction continue. Linéarité, positivité, relation de Chasles, croissance. Valeur moyenne. Inégalité de la moyenne (valeur abs. d'une intégrale).
- Intégrale nulle d'une fonction continue positive.
- Sommes de Riemann. Lien avec méthodes des rectangles, trapèzes.
- Extension aux fonctions à valeurs complexes.
- Calcul intégral. Rappel des méthodes de recherche d'une primitive (IPP, chgt de variable).
- Formule de Taylor avec reste intégral. Formule de Taylor Lagrange

Remarque : toutes les définitions et énoncés ci-dessus doivent être parfaitement connus, même si elles ne figurent pas dans les questions de cours.

Démonstrations de cours exigibles :

1. Caractérisation sous-espaces supplémentaires (énoncé)+ ex : $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ paire } \}$ et $\mathcal{I} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f \text{ impaire } \}$.
2. Comment montrer qu'une famille est libre ? + argument dans le cas des polynômes + ex avec $(\cos, \sin)$ + comment montrer qu'une famille est une base d'un ev de référence de dim finie ?
3. Def dimension d'un e.v. + $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(0) = 0\}$+ def rang d'une famille de vecteurs
4. Formule de Grassmann (énoncé)+ caractérisation des supplémentaires en dim finie (énoncé)+ ex : $S_n(\mathbb{K}) \bigoplus A_n(\mathbb{K}) = M_n(\mathbb{K})$
5. Exo Intégrale de Wallis : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^n dt$: IPP + $W_{2p}; W_{2p+1}$+ décroissance + équivalent
6. Somme de Riemann (énoncé+démo cas lipschitzien)
7. Intégrale nulle d'une fonction continue positive + Inégalité triangulaire pour l'$\int$ (demo)
8. Révision : IPP+ chgt de variables (énoncés) + calcul de $\int^x \exp(2t)\sin(t)dt$
9. Exo Formule de Taylor reste intégral (demo) + Inég. de Taylor-Lagrange (énoncé)
10. Étude de $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ (énoncé) + application : $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

<u>Note aux colleuses et colleurs :</u> les étudiantes et étudiants doivent savoir :

- Démontrer qu'un espace est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Exhiber une famille génératrice, libre, une base et calculer la dimension d'un e.v.
- Montrer que deux sous-e.v. sont en somme directe, sont supplémentaires dans un e-v.
- Déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
- Révisions : techniques de calcul d'intégrales ou primitives
- Reconnaître des sommes de Riemann

Pas fait beaucoup d'exos sur la formule de Grassmann en début de semaine. Donner 3 DL avant de commencer les exercices

Merci de votre collaboration