Chapitre 16

Variables aléatoires à densité

« *La théorie des probabilités n'est, au fond, que le bon sens réduit au calcul* »

Pierre-Simon Laplace (1749-1827)

1 Généralités

Dans tout ce chapitre, (Ω, A, P) désigne un espace probabilisé.

1.1 Définitions

Définition.

On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Une application $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X si, et seulement si, elle satisfait les points suivants :

(i) F est croissante sur $\mathbb{R}$;

(ii) F est continue à droite en tout point de $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{t \to x, t > x} F_X(t) = F_X(x)$.

(iii) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

De plus, on dispose de l'égalité :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $P(X = x) = P(X \leq x) - P(X < x) = F(x) - \lim\limits_{t \to x} -F(t)$.

Définition.

Soit X une variable aléatoire réelle sur (Ω, A, P). On dit que X est une variable aléatoire à densité (ou variable aléatoire continue) si sa fonction de répartition F_X est de plus :

(iv) continue sur $\mathbb{R}$;

(v) de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Exercice

. Soient $\lambda > 0$ et la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = 0$ si $x < 0$, et $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$.

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X définie sur l'espace probabilisé (Ω, A, P) de fonction de répartition F. On dit qu'une telle variable aléatoire suit une loi exponentielle de paramètre λ, ce qu'on note $X \hookrightarrow E(\lambda)$.

2. Montrer que X est une variable aléatoire continue.

✎

Exemple

On rappelle que pour $X \hookrightarrow B(p)$, la fonction de répartition F_X n'est pas continue en 0 et en 1. X n'est donc pas une variable aléatoire à densité.

1.2 Densité de probabilité

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité. On appelle densité de probabilité de X toute fonction f satisfaisant les deux points suivants :

(i) f est positive sur $\mathbb{R}$;

(ii) $f(x) = F'_X(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.

Remarque

. Une densité d'une variable aléatoire n'est pas unique : si f est une densité de X et si l'on change la valeur de f en un nombre fini de points (en prenant pour nouvelles valeurs des réels positifs), alors on obtient une autre densité de f. Ainsi, on parlera pour f d'une densité de X et non de la densité de X.

Exercice

Soient $\lambda > 0$ et $X \hookrightarrow E(\lambda)$. Déterminer une densité de X.

✎

Remarque

Soit X une variable à densité, f une densité de X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ en lequel $f(x) = F'_X(x) \neq 0$ et pour tout $h > 0$ « petit » :

$$P(x < X \leq x + h) = F_X(x + h) - F_X(x) \approx f(x) \cdot h$$

La quantité $f(x) \cdot h$ correspond donc approximativement à la probabilité que X soit proche de x par valeurs supérieures à la précision h. Ainsi, plus la densité prend une valeur élevée au point x, plus la probabilité d'obtenir une valeur proche de x est importante.

Proposition (Lien fonction de répartition/densité)**.**

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$ converge, et :

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\mathrm{d}t$$

Remarque

La donnée d'une densité d'une variable aléatoire caractérise donc sa loi. En particulier si X et Y sont à densité de densités respectives f_X et f_Y, elles ont même loi si, et seulement si, $f_X = f_Y$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Proposition (Lien probabilités/densité)**.**

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1$
- $P(X = a) = 0$.
- $P(X < b) = P(X \leq b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(t)\mathrm{d}t$ et $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = \int_{b}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t$.
- $P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f_X(t)\mathrm{d}t$.

Preuve. F_X étant continue sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$P(X = a) = F_X(a) - \lim_{x \to a^-} F_X(x) = 0$$

Il suit que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}, P(a \leq X \leq b) = P(X = a) + P(a < X \leq b) = P(a < X \leq b)$. On démontre de même les autres égalités. Notons enfin que :

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F_X(b) - F_X(a) = \int_{a}^{b} f_X(t)\mathrm{d}t$$

Remarque

Ainsi si X est continue, $P(X = a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Ceci est bien évidemment faux lorsque X est une variable aléatoire discrète.

Proposition .

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
f est une densité d'une variable aléatoire si, et seulement si, elle satisfait les points suivants :
(i) f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points ;

(ii) f est positive sur $\mathbb{R}$;

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut 1.

Exercice

Vérifier que l'expression trouvée précédemment pour la loi exponentielle est bien l'expression d'une densité.

✎

Exercice

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \frac{\lambda}{1+t^2}$.
1. Déterminer la valeur de λ pour que f soit une densité d'une variable aléatoire X. On dit que X suit une loi de Cauchy.
2. Déterminer sa fonction de répartition F_X.
3. Tracer les courbes représentatives de f et F_X et représenter graphiquement les probabilités $P(-1 \leq X \leq 1)$ et $P(X \geq 1)$. Calculer ces probabilités. Que vaut $P(X \leq -1)$?

✎

Notation

Soit X une variable à densité, et f_X une densité de X. Pour $I = \{t \in \mathbb{R}, f_X(t) > 0\}$:

$$P(X \in I) = \int_I f_X(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = 1$$

On notera dans la suite $X(\Omega) = \{t \in \mathbb{R}, f_X(t) > 0\}$, qu'on appellera l'ensemble image de la variable X. Cet ensemble ainsi défini, dépend de la densité f_X choisie pour X.

Remarque

En notant $m = \inf(X(\Omega))$ et $M = \sup(X(\Omega))$ (dans le cas où l'ensemble $X(\Omega)$ est minoré et majoré), on a :

$$\forall x \leq m, \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0 \ \mathrm{d}t = 0$$
$$\forall x \geq M, \quad F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$$

1.3 Variable aléatoire fonction d'une variable aléatoire à densité

Proposition .

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et soit $g : X(\Omega) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $g(X)$ est une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Exemple

Si X est une variable aléatoire réelle, alors $X^2, e^X, aX+b, \ldots$ sont des variables aléatoires réelles.

Question. Si X est à densité, est-ce que $g(X)$ est encore à densité ? La réponse est non en général, et il nous faudra étudier chaque cas pour pouvoir conclure. Pour cela, nous procéderons comme suit.

Méthode.

Comment montrer que $Y = g(X)$ est à densité et en donner une densité ?
Nous procèderons en quatre étapes :

Étape 1 : Recherche de $Y(\Omega)$.
On fixe une densité de X et on précise $X(\Omega)$. On détermine alors $Y(\Omega)$, image de $X(\Omega)$ par g, afin de trouver sans calcul sur quels intervalles F_Y vaut 0 ou 1.

Étape 2 : Détermination de F_Y.
On revient à la définition $F_Y(x) = P(Y \leq x)$, puis on résout cette inéquation (en prenant bien garde au sens des inégalités) pour l'exprimer à l'aide de F_X.

Étape 3 : Y est-elle continue ?
Une fois F_Y exprimée à l'aide de F_X, on étudie sa continuité sur $\mathbb{R}$ et son caractère $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement d'un nombre fini de points. On conclut ainsi que Y est (ou non) à densité.

Étape 4 : Détermination d'une densité de Y.
On dérive F_Y aux points où c'est possible pour obtenir une densité de Y. On prendra des valeurs arbitraires (positives) aux points où F_Y n'est pas dérivable.

Proposition (Transformation affine d'une variable à densité)**.**

Soit X une variable aléatoire à densité f_X une densité de X. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$, la variable $Y = aX + b$ est à densité, et une densité de Y est donnée par : $t \mapsto \frac{1}{|a|} f_X(t - b)$

Preuve

✎

Remarque

- Si X et Y sont des variables aléatoires à densité, $X + Y$ n'est pas forcément une variable aléatoire à densité. En effet, on peut considérer X et $Y = 1 - X$, pourtant$X + Y = 1$ n'est pas à densité car discrète.
- Si X est une variable aléatoire à densité et ϕ une fonction continue quelconque $\phi(X)$ n'est pas forcément une variable aléatoire à densité.

1.4 Maximum et minimum de deux variables aléatoires à densité indépendantes

Méthode.

Comment déterminer la loi de $\text{Max}(X, Y)$, si X et Y sont indépendantes et à densité ? Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes. Pour trouver la loi de $S = \text{Max}(X, Y)$, on cherche la fonction de répartition de S, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, [S \leq x] = [X \leq x] \cap [Y \leq x].$$

On obtient alors la fonction de répartition de S avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq x) = F_X(x)F_Y(x).$$

Remarque

Maximum de variables aléatoires à densité mutuellement indépendantes Soient $X_1 X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à densité mutuellement indépendantes, pour déterminer le $S = \mathrm{Max}\,(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, on utilise la même méthode que précédemment :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k \leq x]\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\,(X_k \leq x) = \prod_{k=1}^{n} F_{X_k}(x).$$

Méthode.

Comment déterminer la loi de $\mathrm{Min}(X, Y)$ si X et Y sont indépendantes et à densité ? Soient X et Y deux variables aléatoires à densité indépendantes. Pour trouver la loi de $I = \mathrm{Min}(X, Y)$, on cherche la fonction de répartition de I, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, [I > x] = [X > x] \cap [Y > x].$$

On obtient alors la fonction de répartition de I avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_I(x) = 1 - \mathbb{P}(I > x) = 1 - (1 - F_X(x))\,(1 - F_Y(x))\,.$$

Exemple

Soient $a, b > 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(b)$ deux variables aléatoires indépendantes, déterminer la loi de $I = \mathrm{Min}(X, Y)$.

2 Espérance d'une variable aléatoire à densité

2.1 Définitions

Définition (Espérance)**.**

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X. On dit que X admet une espérance $E(X)$ si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt$ est absolument convergente. Dans ce cas,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)dt$$

Exercice

Déterminer l'espérance de X, si elle existe, dans les cas suivants :
1. X suit une loi exponentielle ;
2. X suit une loi de Cauchy.

✎

Proposition (Linéarité de l'espérance)**.**

Soient X et Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance. Alors pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $\lambda X + \mu Y$ admet une espérance, et :

$$E(\lambda X + \mu Y) = \lambda E(X) + \mu E(Y)$$

Proposition (Existence de l'espérance par domination)**.**

Soient X, Y deux variables aléatoires à densité telles que $0 \leq |X| \leq Y$ presque sûrement. Si Y admet une espérance, alors X admet aussi une espérance, et $|E(X)| \leq E(Y)$.

Proposition (Variables bornées et espérance)**.**

Soit X une variable aléatoire à densité. Si X est bornée, c'est-à-dire si $X(\Omega)$ est bornée, alors X admet une espérance. Bien que $X(\Omega)$ dépende de la densité de X choisie, son caractère borné est lui indépendant de ce choix puisque deux densités de X different au plus sur un nombre fini de points.

Exemple

Une variable X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$ si elle admet pour densité la fonction :

$$f : t \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puisque $X(\Omega) = [a, b]$, X est bornée et admet donc une espérance.

Propriété.

Soient X, Y des variables aléatoires à densité admettant une espérance.

- Positivité de l'espérance : si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $E(X) \geq 0$.

- Croissance de l'espérance : si $X \leq Y$ presque sûrement, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème (Théorème de transfert)**.**

Soit X une variable aléatoire admettant une densité f_X nulle en dehors de $]a, b[$ $(a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$, et soit $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue sauf éventuellement en un nombre fini de points. $E(\varphi(X))$ existe si, et seulement si, $\int_a^b \varphi(t) f_X(t) \mathrm{d}t$ converge absolument. Et en cas de convergence absolue :

$$E(\varphi(X)) = \int_a^b \varphi(t) f_X(t) \mathrm{d}t$$

Corollaire.

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la variable $aX + b$ admet une espérance, et :

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Preuve

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = at + b$. φ est continue sur $\mathbb{R}$, et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$|\varphi(t)f_X(t)| = |atf_X(t) + bf_X(t)| \leq |a||tf_X(t)| + |b|\,|f_X(t)| \text{ par inégalité triangulaire.}$$

Or $\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)\mathrm{d}t$ converge absolument car X admet une espérance, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t$ converge (absolument). Par théorème de comparaison, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)f_X(t)\mathrm{d}t$ converge absolument. Par le théorème de transfert, $E(aX+b)$ existe donc bien, et :

$$E(aX+b) = \int_{-\infty}^{+\infty} (at+b)f_X(t)\mathrm{d}t \overset{\text{tout converge}}{=} a\int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)\mathrm{d}t + b\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\mathrm{d}t = aE(X)+b.$$

Exercice

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. 1. La variable aléatoire $Y = e^X$ admet-elle une espérance ? 2. Montrer que $Z = X^2$ admet une espérance qu'on calculera.

2.2 Moments d'ordre supérieur, variance

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité, f_X une densité de X, et $r \in \mathbb{N}^*$.
On dit que X admet un moment d'ordre r si X^r admet une espérance. Par le théorème de transfert, c'est le cas si, et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(t)\mathrm{d}t \quad \text{converge absolument.}$$

Dans ce cas, on note $m_r(X) = E\left(X^r\right)$ le moment d'ordre r de X.

Propriété.

Soit X une variable aléatoire à densité, et soit $q, r \in \mathbb{N}^*$ tels que $q \leq r$. Si X admet un moment d'ordre r, alors X admet un moment d'ordre q.

Remarque

Si une variable à densité X admet un moment d'ordre 2 , alors X admet une espérance.

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance, et f_X une densité de X. On dit que X admet une variance si $(X - E(X))^2$ admet une espérance. D'aprés le théorème de transfert, c'est le cas si, et seulement si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\mathrm{d}t \quad \text{converge absolument.}$$

Dans ce cas, la variance de X, notée $V(X)$, est :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\mathrm{d}t$$

Définition.

Si X est une variable alèatoire à densité admettant une variance, alors $V(X) > 0$. On appelle écart-type de X, et on note $\sigma(X)$, le réel défini par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Preuve

Supposons que X admette une variance, et notons f_X une densité de X. La fonction $g : t \mapsto (t - E(X))^2 f_X(t)$ est positive sur $\mathbb{R}$, d'où par positivité de l'intégrale :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^2 f_X(t)\mathrm{d}t \geq 0$$

Supposons $V(X)=0$. Notons $a_1<a_2<\cdots<a_n$ les points de discontinuité (éventuels) de f_X. Pour tout $i\in[1,n-1]$, la fonction g est continue et positive sur $]a_i,a_{i+1}[$, d'intégrale nulle sur cet intervalle. Par théorème de nullité de l'intégrale, g est nulle sur $]a_i,a_{i+1}$ $[$. Puisque de plus $(t-E(X))^2$ s'annule uniquement pour $t=E(X)$, f_X est donc nulle sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points $E(X),a_1,\ldots,a_n$. Mais alors $\int_{-\infty}^{+\infty} fx(t)\mathrm{d}t=0$, ce qui est faux puisque cette intégrale est égale à 1. Ainsi $V(X)$ est bien strictement positive.

Propriété.

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance, et soient $a,b\in\mathbb{R}$. Alors $aX+b$ admet une variance, et :

$$V(aX+b)=a^2V(X)$$

Proposition (Formule de Huygens)**.**

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une espérance. Alors X admet une variance si, et seulement si, X admet un moment d'ordre deux. Et lorsque ciest le cas :

$$V(X)=E\left(X^2\right)-E(X)^2.$$

Définition.

Soit X une variable aléatoire à densité.

- X est dite centrée si X admet une espérance et si $E(X)=0$.

- X est dite centré réduite si X admet une variance, et $E(X)=0, V(X)=1$.

Propriété.

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance. Alors :

- $X-E(X)$ est centrée ;

- $X^*=\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite. On l'appelle la variable aléatoire centrée réduite associée à X.

Preuve

✎