Exercice : Intégrales de Wallis

1. *Intégrales de Wallis*
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale suivante :
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$$
   (a) $W_0 = \frac{\pi}{2}$ et $W_1 = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$.
   (b) On effectue un changement de variable avec $y = \frac{\pi}{2} - t$. Alors
$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos(y))^n (-dy) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(y))^n dy$$
   car $\sin(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos(y)$
   (c)
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Par intégration par parties, les fonctions $t \mapsto \cos t$ et $t \mapsto \sin^{n+1} t$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a :
$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times \sin^{n+1} t = \left[\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t (n+1)(-\cos t \sin^n t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t dt = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \cos^2 t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= (n+1) W_n - (n+1) I W n + 2. \end{aligned}$$
   (d)
$$\begin{aligned} W_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \frac{(2p-1)(2p-3)}{(2p)(2p-2)} I_{2p-4} \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3)(2p-5)}{(2p)(2p-2)(2p-4)} I_{2p-6} = \cdots = \frac{(2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 1}{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2} W_0. \\ &= \frac{[(2p-1) \times (2p-3) \times \cdots \times 1] \times [(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2]}{[(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2]^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{4^p (p!)^2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
   et de même :
$$\begin{aligned} W_{2p+1} &= \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \frac{(2p)(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3} \\ &= \frac{(2p)(2p-2)(2p-4)}{(2p+1)(2p-1)(2p-3)} I_{2p-5} = \cdots = \frac{(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2}{(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 3} W_1 \\ &= \frac{[(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2]^2}{[(2p+1) \times (2p-1) \times \cdots \times 3] \times [(2p) \times (2p-2) \times \cdots \times 2]} \\ &= \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} = \frac{4^p (p!)^2}{(2p+1)!} \end{aligned}$$
   (e) Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} &\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad , \quad 0 < \cos(t) < 1 \\ &\forall t \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad , \quad 0 < (\cos(t))^{n+1} < (\cos(t))^n \text{ on a multiplié par } \cos(t)^n > 0 \end{aligned}$$

En intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$W_{n+1} < W_n$$

La suite $(W_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante.

(f) On va raisonner par récurrence en posant

$$\forall n \geq 0,\ P(n)\ :\ "W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}"$$

— Initialisation : $W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$ par la question 1 donc P(0) est vraie.
— Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 0$.

$$W_{n+1}W_{n+2} = W_{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} W_n = \frac{n+1}{n+2} W_n W_{n+1} \underset{HDR}{=} \frac{n+1}{n+2}\frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{\pi}{2(n+2)}$$

donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.
— Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

(g) La suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N},\ W_{n+1} < W_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1$.

Pour l'autre inégalité, on utilise le lien entre W_{n+2} et W_n déjà démontré.

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}}.\frac{W_{n+2}}{W_n} > 1.\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - \frac{1}{n+2} < \frac{W_{n+1}}{W_n} < 1.$$

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+2} = 1$. Par le théorème d'encadrement, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1 \Leftrightarrow W_n \underset{+\infty}{\sim} W_{n+1}$$

(h) On a montré à la question (d) que $W_n W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)}$. En y ajoutant le résultat de la question précédente, on obtient

$$W_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)} \text{ donc } W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$