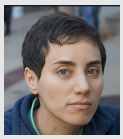
Chapitre 5
Nombres complexes



Maryam Mirzakhani (1977-2017), mathématicienne irannienne, médaille Fields 2014
« La beauté des mathématiques ne se révèle qu'à ceux qui les poursuivent avec patience. »
Entretien par Clay Mathematics Institute (2014)

Programme officiel de mathématiques en CPGE PCSI (2021)

L'objectif de cette section, que l'on illustrera par de nombreuses figures, est de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

– l'étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique ;

– l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;

– l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Brève extension du calcul de $\sum_{k=1}^{n} x^k$, de la factorisation de $a^n - b^n$, de la formule du binôme. Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	La construction de $\mathbb{C}$ est hors programme. On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct (« plan complexe »).
b) Conjugaison et module	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations. Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Image du conjugué dans le plan complexe. Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Identification du cercle trigonométrique et de l'ensemble des nombres complexes de module 1. Définition de e^{it} pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme. Formules d'Euler. Technique de l'angle moitié : factorisation de $1 \pm e^{it}$, de $e^{ip} \pm e^{iq}$. Formule de Moivre.	Notation $\mathbb{U}$. Les étudiants doivent savoir retrouver les formules donnant $\cos(p) \pm \cos(q), \sin(p) \pm \sin(q)$. Linéarisation, calcul de $\sum_{k=1}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=1}^{n} \sin(kt)$ Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.
d) Forme trigonométrique	
Forme trigonométrique $re^{i\theta}(r \neq 0)$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t - \phi)$.	
e) Équations algébriques	
Pour P fonction polynomiale à coefficients complexes admettant a pour racine, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$. Somme et produit des racines.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
f) Racines n-ièmes	
Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique. Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.

g) Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{Re(z)}e^{iIm(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.	Notations $\exp(z)$, e^z . Module et arguments de e^z .

h) Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique des module et arguments de $\frac{c-a}{b-a}$. Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az$ et $z \mapsto z+b$ pour $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité. Il s'agit d'introduire certaines transformations du plan : translations, homothéties, rotations. Interprétation géométrique de la conjugaison. L'étude générale des similitudes est hors programme.

I Un peu d'histoire mathématique

L'histoire des nombres complexes commence vers le milieu du XVIe siècle avec une première apparition en 1545, dans l'œuvre de Cardan, d'une expression contenant la racine carrée d'un nombre négatif, nombre qu'il appelle sophistiqué. C'est Raphaël Bombelli qui met en place les règles de calcul sur ces quantités que l'on appelle alors impossibles avant de leur donner le nom d'imaginaires. Euler, quant à lui, introduisit en 1777, le symbole moderne i pour $\sqrt{-1}$.

Durant trois siècles, ces nombres sont regardés avec méfiance, n'en étant pas vraiment mais permettant des raccourcis intéressants tant en algèbre que dans la toute nouvelle branche du calcul infinitésimal. Les mathématiciens du XVIIIe siècle tentent avec audace de généraliser les fonctions de la variable réelle à la variable imaginaire, tantôt avec succès, comme pour l'exponentielle complexe, tantôt avec plus d'aléas, comme pour la fonction racine n-ième.

Durant la première moitié du XIXe siècle se succèdent les tentatives de légitimation des nombres complexes comme représentation du plan, ensemble de polynômes ou structure algébrique définie sur des couples de réels. Cependant leur utilité dans tous les domaines de l'algèbre et l'analyse et l'utilisation qu'en font les physiciens, tant en optique que dans le domaine de l'électricité, en avaient déjà fait des outils essentiels des sciences mathématiques et physiques.

II Généralités

II.A Définition

Définition 1 ($\mathbb{C}$, nombre complexe, i)**.**

L'ensemble des **nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, est défini par :

$$\mathbb{C} = \{a + ib |\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

où i est un nombre qui vérifie $i^2 = -1$.

Définition 2 (écriture algébrique d'un complexe, partie réelle, partie entière)**.**

Soit z un nombre complexe. Il existe donc un couple unique $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + ib$; c'est **l'écriture ou la forme algébrique** de z. De plus :

1. le réel a est **la partie réelle de** z, on la note $\mathcal{R}e(z) = a$;
2. le réel b est quant à elle **la partie imaginaire de** z, on écrit $\mathcal{I}m(z) = b$.

Remarque

Comme la forme algébrique d'un complexe est unique, on a les équivalences suivantes :

$$a+ib = a'+ib' \text{ avec } a,\, b,\, a',\, b' \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a = a' \\ \text{et} \\ b = b' \end{cases}$$

$$a+ib \in \mathbb{R} \text{ avec } a,\, b \in \mathbb{R} \iff b = 0.$$

Définition 3 (affixe d'un point, plan complexe)**.**

Soit $\mathcal{P}$ le plan cartésien muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Il existe alors une bijection canonique entre $\mathcal{P}$ et $\mathbb{C}$ définie comme suit :

1. si M est un point de $\mathcal{P}$, il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$. L'**affixe** de M ou l'**affixe** du vecteur $\overrightarrow{OM}$ est le complexe $z_M = a+ib$.
2. si $z = a+ib$ est un complexe écrit sous sa forme algébrique, on lui associe le point M_z vérifiant $\overrightarrow{OM_z} = a\vec{i} + b\vec{j}$.

Le **plan complexe** est le plan usuel muni d'un repère orthonormé direct identifié à $\mathbb{C}$.

Cette identification du plan usuel muni d'un repère orthonormé direct avec l'ensemble des nombres complexes permet d'avoir une interprétation géométriques des résultats qu'on aura sur $\mathbb{C}$ mais aussi de résoudre des problèmes de géométrie en se ramenant à des problèmes dans $\mathbb{C}$.

II.B Premiers calculs avec les nombres complexes

Comme n'importe quel autre nombre, les complexes peuvent être additionner, multiplier, diviser (pourvu que le dénominateur ne soit pas nul) etc.

Proposition 1.

Soit $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ deux complexes écrits sous leur forme algébrique. Alors :

1. $z+z' = (a+a') + i(b+b')$, en particulier on a :
$$\mathcal{R}e(z+z') = \mathcal{R}e(z) + \mathcal{R}e(z') \text{ et } \mathcal{I}m(z+z') = \mathcal{I}m(z) + \mathcal{I}m(z') \text{ ;}$$
2. $z \times z' = zz' = (aa'-bb') + i(ab'+a'b)$, en particulier on a d'une part :
$$\mathcal{R}e(zz') = \mathcal{R}e(z)\mathcal{R}e(z') - \mathcal{I}m(z)\mathcal{I}m(z') \text{ et } \mathcal{I}m(zz') = \mathcal{R}e(z)\mathcal{I}m(z') + \mathcal{I}m(z)\mathcal{R}e(z')$$
et d'autre part, si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\mathcal{R}e(\lambda z) = \lambda \mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(\lambda z) = \lambda \mathcal{I}m(z)$;

Proposition 2.

Soit $z = a+ib$ un complexe. Alors, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a-ib}{a^2+b^2}$ si $z \neq 0$.

Preuve

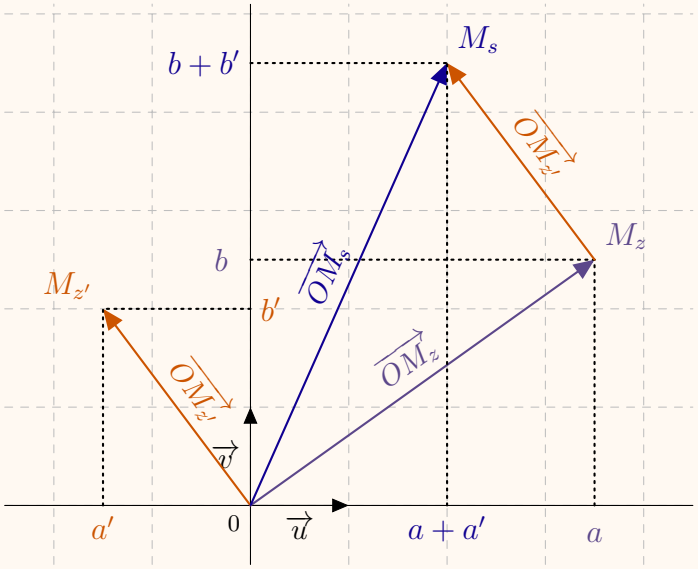
Il suffit d'écrire les égalités en gardant en tête que $i^2 = -1$. On a par exemple :

$$\begin{aligned} z \times \frac{a-ib}{a^2+b^2} &= \frac{(a+ib)(a-ib)}{a^2+b^2} = \frac{a^2-(ib^2)}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^2-(i^2)b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2-(-1)b^2}{a^2+b^2} \text{ car } i^2=-1 \\ &= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

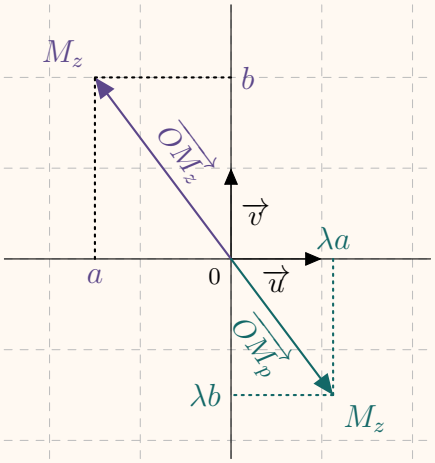
Remarques

• Avec les formes algébriques, il est simple d'additionner deux complexes. Mais il est plus délicat de les multiplier et de diviser.

• La somme de complexes correspond à la somme de vecteurs dans le plan complexe et que la multiplication d'un complexe par un réel correspond à la multiplication de vecteur dans le plan. Illustrons cela pour un dessin. Soit $z = a+ib$ et $z' = a'+ib'$ deux complexes écrits sous leur forme algébrique et $s = z+z'$; soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p = \lambda z$.



On voit que s correspond au point M_s défini par la relation $\overrightarrow{OM_s} = \overrightarrow{OM_z} + \overrightarrow{OM_{z'}}$.



On voit que p correspond au point M_p défini par la relation $\overrightarrow{OM_p} = \lambda \overrightarrow{OM_z}$.

II.C Conjugaison

Définition 4 (conjugué).

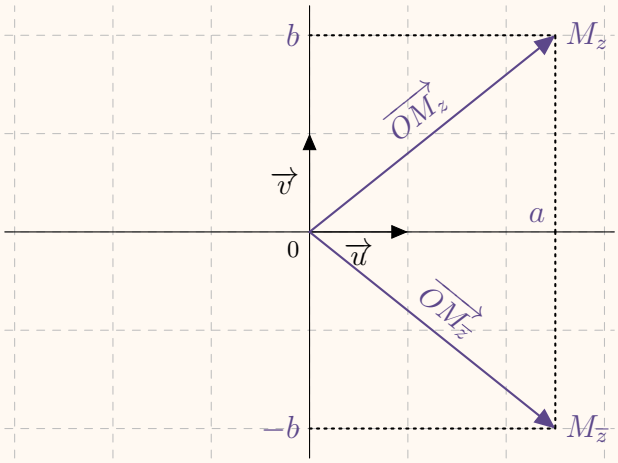
Soit $z = a+ib$ avec a, $b \in \mathbb{R}$ un complexe. Le **conjugué** de z, noté $\overline{z}$, est défini par :

$$\overline{z} = a - ib.$$

En particulier, $\mathcal{R}e(\overline{z}) = \mathcal{R}e(z)$ et $\mathcal{I}m(\overline{z}) = \mathcal{I}m(z)$.

Remarque

Prendre le conjugué d'un complexe revient à considérer l'image du point qui lui est associé par la symétrie axiale de droite l'axe des abscisses. Soit z un complexe.



Proposition 3 (conjugaison et opération)**.**

Soit z et z' deux complexes. Alors :

1. $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
2. $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$;
3. $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$.

Preuve

Soit $z = a + in$ et $z' = a' + ib'$ les écritures algébriques des deux complexes. Alors, on a :

1. $\overline{z+z'} = \overline{(a+a') + i(b+b')} = (a+a') - i(b+b')$ et $\overline{z} + \overline{z'} = a - ib + a' - ib'$, d'où l'égalité voulue ;
2. $\overline{zz'} = \overline{(aa'-bb') + i(ab'+a'b)} = (aa'-bb') - i(ab'+a'b)$ et $\overline{z}\,\overline{z'} = (a-ib)(a'-ib') = (aa'-bb') + i(-ab'-a'b)$, ce qui donne l'égalité souhaitée ;
3. $\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\dfrac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \dfrac{a+ib}{a^2+b^2}$ et $(\overline{z})^{-1} = (a-ib)^{-1} = \dfrac{a-(-ib)}{a^2+b^2}$, d'où la conclusion.

Proposition 4.

Soit z un complexe. Alors :

1. $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$;
2. $\overline{\overline{z}} = z$ (on dit que la conjugaison est une **involution**).

Preuve

Ici aussi, il suffit d'écrire les complexes intervenants dans la proposition sous leur forme algébrique. Soit $z = a + in$ l'écriture algébrique de z. Alors, par exemple :

$$\frac{z+\overline{z}}{2} = \frac{a+ib+a-ib}{2} = a = \mathcal{R}e(z).$$

Corollaire 1.

Soit z un complexe. Alors on a les équivalences suivantes :

1. $z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$;
2. z est un imaginaire pur $\iff z = -\overline{z}$.

Preuve

Par la proposition précédente, on sait que $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2}$. Il en découle les deux séries d'équivalence suivante :

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathcal{I}m(z) = 0 \iff \frac{z-\overline{z}}{2} = 0 \iff z - \overline{z} \iff z = \overline{z}.$$

$$z \text{ imaginaire pur} \iff \mathcal{R}e(z) = 0 \iff \frac{z+\overline{z}}{2} = 0 \iff z + \overline{z} \iff z = -\overline{z}.$$

III Module d'un nombre complexe

Définition 5 (module d'un complexe)**.**

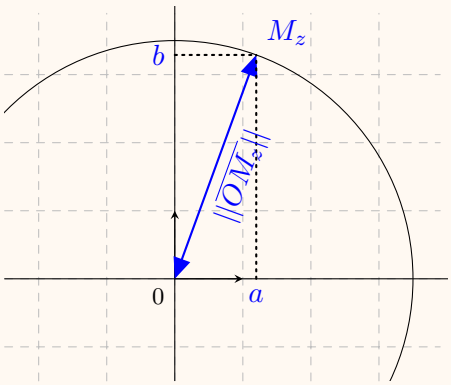
Soit $z = a + ib$ avec a, $b \in \mathbb{R}$. Le **module**, noté $|z|$, est le réel positif défini par :

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarques

• La fonction module est un prolongement de la fonction valeur absolue à $\mathbb{C}$; c'est la raison pour laquelle les notations de la valeur absolue et du module sont les mêmes.

• Ici aussi, il existe une interprétation géométrique à cet outil. Si $z = a + ib$ est un complexe écrit sous sa forme complexe et si M_z est son point du plan complexe associé, alors $|z| = ||\overrightarrow{OM_z}||$. En effet, on a le dessin suivant :



Ainsi, si z et z' sont deux complexes, alors $|z - z'|$ est la distance entre les points M_z et $M_{z'}$ associés ces complexes. Il en découle deux identifications importantes :

1. le cercle de centre A et de rayon r du plan s'identifie avec l'ensemble des complexes $\{z \in \mathbb{C} |\ |z - a| = r\}$ où a est l'affixe de A ;
2. le disque de centre A et de rayon r du plan s'identifie avec l'ensemble des complexes $\{z \in \mathbb{C} |\ |z - a| \leq r\}$.

Proposition 5.

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors :

1. $|z| = 0 \iff z = 0$;
2. $|\mathcal{R}e(z)| \leq |z|$ et $|\mathcal{I}m(z)| \leq |z|$;
3. $z\overline{z} = |z|^2$ et donc $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ si $z \neq 0$;
4. $|z| = |\overline{z}|$;
5. $|zz'| = |z||z'|$ et, si $z \neq 0$, alors $|z^{-1}| = |z|^{-1}$. Plus généralement, si z est non nul, $|z^\alpha| = |z|^\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve

1. Par définition, $|z|^2 = a^2 + b^2$. Or une somme de termes positifs est nulle si, et seulement si, chaque terme l'est :
$$|z| = 0 \iff |z|^2 = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}.$$
2. Comme $a^2 \leq a^2 + b^2$ et $b^2 \leq a^2 + b^2$, en passant à la racine, et comme $\mathcal{R}e(z) = a$ et $\mathcal{I}m(z) = b$, on a bien $|\mathcal{R}e(z)| \leq |z|$ et $|Im(z)| \leq |z|$.
3. Un rapide calcul donne $z\overline{z} = |z|^2$. Si $z \neq 0$, en partant de cette égalité et en faisant des changements de côté, on trouve bien $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$.
4. On a : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |\overline{z}|$.
5. On a : $|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = zz'\overline{z}\overline{z'} = z\overline{z} \times z'\overline{z'} = |z|^2|z'|^2$. De plus, si $z \neq 0$, alors :
$$|z^{-1}| = \frac{1}{z}\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{z\overline{z}} = |z|^{-1}.$$

Proposition 6 (inégalité triangulaire)**.**

Soit z et z' deux nombres complexes. Alors : $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ avec une égalité si, et seulement si, z et z' sont positivement liés, *i.e.* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z = \lambda z'$ ou $z' = \lambda z$. Il découle de cette inégalité, l'inégalité triangulaire inversée :
$$||z| - |z'|| \leq |z - z'|.$$

Remarque

L'inégalité triangulaire a une interprétation géométrique : le plus court chemin entre deux points est la ligne droite !

Preuve

Montrons-là par équivalence. Les nombres de chaque côté de l'inégalité triangulaire étant positifs, nous avons :
$$\begin{aligned}
|z + z'| \leq |z| + |z'| &\iff |z + z'|^2 \leq (|z| + |z'|)^2. \\
&\iff (z + z')\overline{(z + z')} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||\overline{z'}| \\
&\iff z\overline{z} + z'\overline{z'} + z\overline{z'} + z'\overline{z} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||\overline{z'} \\
&\iff |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + z'\overline{z} \leq |z|^2 + |z'|^2 + 2|z||\overline{z'} \\
&\iff z\overline{z'} + z'\overline{z} \leq 2|z||\overline{z'}| \\
&\iff 2\mathcal{R}e(z\overline{z'}) \leq 2|z||\overline{z'}|
\end{aligned}$$

Or cette dernière égalité est toujours vraie. Ainsi l'inégalité triangulaire est prouvée. Montrons le cas d'égalité. Celui-ci est évident si $z' = 0$. Concentrons-nous donc sur le cas où $z' \neq 0$. Par ce que l'on a écrit ci-dessus, on a :
$$|z + z'|^2 = (|z| + |z'|)^2 \iff \mathcal{R}e(z\overline{z'}) = |z||z'| = |zz'|.$$

Or on sait que, si $t \in \mathbb{C}$, alors l'équivalence « $\mathcal{R}e(t) = |t| \iff t \in \mathbb{R}^+$ »est vraie. Aussi :
$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 = (|z| + |z'|)^2 &\iff z\overline{z'} \in \mathbb{R}^+ \\
&\iff \exists \lambda' \in \mathbb{R}^+,\ z\overline{z'} = \lambda' \\
&\iff \exists \lambda' \in \mathbb{R}^+,\ z|z'|^2 = \lambda' z' \text{ car } z' \neq 0 \\
&\iff \exists \lambda' \in \mathbb{R}^+,\ z = \frac{\lambda'}{|z'|^2} z' \text{ car } |z'|^2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Finalement, en partant de cette l'inégalité triangulaire, on trouve l'inégalité triangulaire renversée en procédant exactement comme l'inégalité triangulaire renversée de la valeur absolue.

IV Argument d'un complexe non nul

IV.A Cercle trigonométrique

Définition 6 (cercle trigonométrique/unité, $\mathbb{U}$).

Le **cercle trigonométrique** ou **cercle unité** est le cercle de rayon 1 et de centre O dans le plan complexe ; il s'identifie à l'ensemble $\mathbb{U}$ défini par :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| = 1\}.$$

Remarque

Les propriétés du module font que $\mathbb{U}$ est stable par produit, par conjugaison (qui est égale au passage à l'inverse sur $\mathbb{U}$). En effet, si z et $z' \in \mathbb{U}$, alors :

1. $zz' \in \mathbb{U}$;
2. $\overline{z} = \dfrac{1}{z} \in \mathbb{U}$.

Théorème 1 (paramétrisation du cercle unité).

On a :

$$\mathbb{U} = \{\cos\theta + i\sin\theta |\ \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Ainsi, si $z \in \mathbb{U}$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = \cos\theta + i\sin\theta$.

Preuve

Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique. Chaque point de ce cercle peut être représenté par l'angle θ formé par les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OM}$ et a donc pour coordonnées $(\cos\theta, \sin\theta)$.
Il en découle que chaque complexe z de $\mathbb{U}$ correspond à un point de $\mathcal{C}$ et s'écrit donc sous la forme

$$z = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Réciproquement, si $z = \cos\theta + i\sin\theta$, alors, comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, on en déduit que $|z| = 1$ ou, en d'autres termes que $z \in \mathbb{U}$.

IV.B Généralités

Définition 7 (argument, argument principal, écriture trigonométrique).

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $r = |z| > 0$.
• Un **argument** de z, noté $\arg(z)$, est un réel θ vérifiant $\dfrac{z}{r} = \cos\theta + i\sin\theta$. Notons que comme $\dfrac{z}{r} \in \mathbb{U}$, par le théorème de paramétrisation du cercle unité, un tel réel existe.
• L'**argument principal** de z est l'unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ vérifiant $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.
• Soit θ un argument de z. L'**écriture trigonométrique** ou la **forme trigonométrique** de z est :

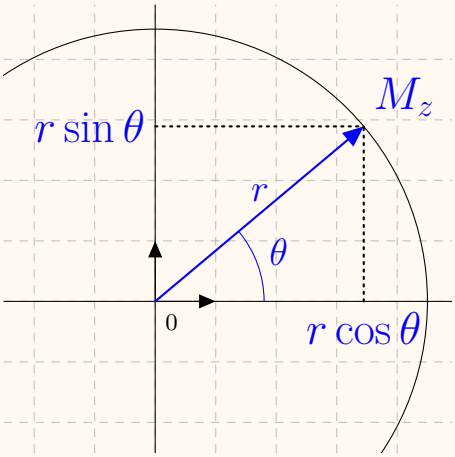
$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

⚠ • L'argument d'un complexe de $\mathbb{U}$ n'est pas unique : les propriétés des fonctions trigonométriques imposent que si θ est un argument de $z \in \mathbb{Z}$, alors les arguments de z sont exactement les réels de la forme $\theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

• L'écriture $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ n'est une forme algébrique que si $r \geq 0$ car $r = |z| \geq 0$. Aussi, l'écriture $z = -2(\cos\dfrac{\pi}{5} + i\sin\dfrac{\pi}{5})$ n'est par exemple pas une forme algébrique.

Remarque

Il existe une interprétation géométrique à l'argument d'un complexe. Soit z un complexe non nul dont l'écriture trigonométrique est $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Soit M_z le point du plan complexe associé à z. Alors on a le dessin suivant :



Exemple 1

Déterminer la forme trigonométrique de $z = \dfrac{\sqrt{6}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On a :

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}.$$

Aussi : $\dfrac{z}{|z|} = \dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{i}{2}$. Soit θ argument de z. Par définition, nous avons donc $\dfrac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta$. Par unicité de la forme algébrique d'un complexe, nous obtenons alors le système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Or les solutions de ce système sont $\theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{R}$ou $-\dfrac{\pi}{6}$. Aussi, une forme trigonométrique de z est :

$$z = \sqrt{2}(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ avec } \theta = -\frac{\pi}{6}.$$

La proposition suivant est une conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique d'un complexe.

Proposition 7.

Soit z un complexe non nul et $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z. Alors :

$$\mathcal{R}e(z) = |z|\cos\theta \text{ et } \mathcal{I}m(z) = |z|\sin\theta.$$

Corollaire 2.

Soit z et z' deux complexes non nuls. Soit θ et $\theta' \in \mathbb{R}$ des arguments de z et de z'. Alors :

$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \theta \equiv \theta' \mod 2\pi \end{cases}.$$

Preuve

L'unicité de la forme algébrique d'un complexe donne l'équivalence suivante :

$$z = z' \iff \begin{cases} \mathcal{R}ez = \mathcal{R}ez' \\ \mathcal{I}mz = \mathcal{I}mz' \end{cases} \iff \begin{cases} \mathcal{R}ez = \mathcal{R}ez' \\ \mathcal{I}mz = \mathcal{I}mz' \\ \mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2 = \mathcal{R}e(z')^2 + \mathcal{I}m(z')^2 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \\ |z| = |z|(z') \end{cases}$$

par la proposition précédente et parce que le module d'un complexe est toujours positif. On conclue grâce à l'équivalence :

$$\begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases} \iff \theta \equiv \theta' \mod 2\pi.$$

Proposition 8.

Soit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ deux complexes non nuls écrits trigonométriquement. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Alors :

1. $zz' = rr'\big(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\big)$, en particulier :
$$|zz'| = |z||z'| \text{ et } \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$
2. $\lambda z = (\lambda r)(\cos\theta + i\sin\theta)$, en particulier :
$$|\lambda z| = \lambda|z| \text{ et } \arg(\lambda z) = \arg(z);$$
3. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$ si $z \neq 0$, , en particulier :
$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \text{ et } \arg(z^{-1}) = -\arg(z);$$
4. $\overline{z} = r(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$, en particulier :
$$|\overline{z}| = |z| \text{ et } \arg(\overline{z}) = -\arg(z).$$

Remarque

En utilisant les formes trigonométriques, il est facile de multiplier les complexes, de les diviser et d'utiliser les puissances :
• il faut utiliser l'écriture algébrique pour les additions et les soustractions ;
• il est préférable d'utiliser l'écriture trigonométrique (puis comme nous le verrons après, l'écriture exponentielle) dans les multiplications, les divisions mais aussi avec les puissances.

Preuve

Nous ferons cette preuve avec des notations dans le paragraphe suivant.

V Écriture exponentielle d'un complexe

V.A Généralités

Définition 8 (e^{it}).

Soit $t \in \mathbb{R}$, le nombre complexe e^{it} est l'unique nombre complexe de module 1 dont un argument est t. En d'autres termes, il est défini par :

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t).$$

Définition 9 (écriture exponentielle).

• Soit z un nombre complexe non nul et $\theta \in \mathbb{R}$ un argument de z. L'**écriture exponentielle** ou la **forme exponentielle** de z est :

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Ainsi, la proposition 4.2.**??** peut être reformulée comme suit.

Proposition 9.

Soit $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux complexes non nuls. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Alors :

1. $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$, en particulier :
$$|zz'| = |z||z'| \text{ et } \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$$
2. $\lambda z = (\lambda r)e^{i\theta}$, en particulier :
$$|\lambda z| = \lambda|z| \text{ et } \arg(\lambda z) = \arg(z);$$
3. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ si $z \neq 0$, , en particulier :
$$|z^{-1}| = |z|^{-1} \text{ et } \arg(z^{-1}) = -\arg(z);$$
4. $\overline{z} = re^{-i\theta}$, en particulier :
$$|\overline{z}| = |z| \text{ et } \arg(\overline{z}) = -\arg(z).$$

Preuve

Les résultats sur les modules sont déjà connus grâce à la proposition 3.0**??** ; aussi il suffit de montrer la proposition pour $r = 1 = r'$. On a
(i)

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= \Big[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\Big] + i\Big[\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)\Big] \end{aligned}$$

par les formules d'addition du cosinus et du sinus ; et d'autre part :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}e^{i\theta'} &= \big(\cos\theta + i\sin\theta\big)\big(\cos\theta' + i\sin\theta'\big) \\ &= \Big[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'\Big] + i\Big[\cos(\theta)\sin(\theta') + \cos(\theta')\sin(\theta)\Big]. \end{aligned}$$

L'égalité voulue $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ en découle de même que les égalités sur les arguments.
(ii)L'égalité $\lambda z = (\lambda r)e^{i\theta}$ est immédiate.
(iii) Supposons z non nul. Alors, on obtient : $z \times e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^0 = 1$. On en déduit l'égalité $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ si $z \neq 0$ et celle sur les arguments.
(iv) On a $\overline{z} = z^{-1}$ puisque $|z| = 1$. Aussi, ce point provient directement du précédent.

V.B Applications aux nombres complexes de module 1

Comme nous l'avons vu, les nombres complexes sont liés à la trigonométrie **??** (formulée autrement ici et restreinte aux complexes de module 1, *i.e.* au cercle trigonométrique $\mathcal{C}$).

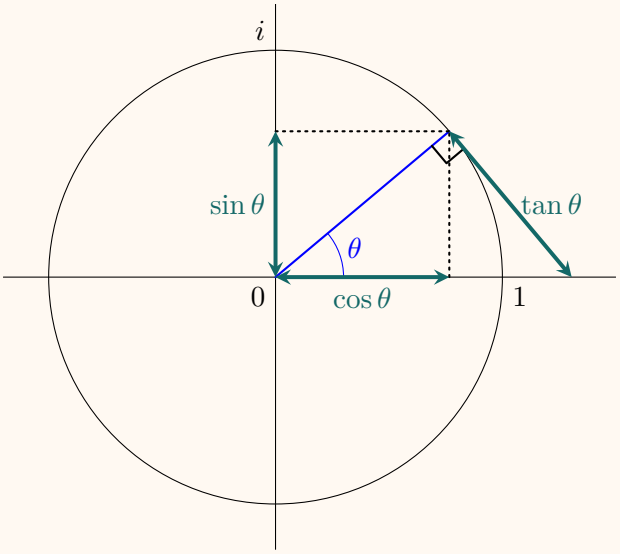
Proposition 10.

Soit $x \in \mathbb{R}$, M_x le point du cercle $\mathcal{C}$ donné par l'angle x et $z \in \mathbb{U}$ l'affixe de M. Alors $\cos x = \mathcal{R}e(z)$, $\sin x = \mathcal{I}m(z)$ et $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\mathcal{I}m(z)}{\mathcal{R}e(z)}$ si $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2} \mod \pi$.

Remarque

On retrouve l'interprétation sur les triangles donnée au collège pour un angle $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$:

$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}, \ \sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}} \text{ et } \tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} ;$$



Corollaire 3 (formules d'Euler).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Preuve

On sait que $\cos\theta = \mathcal{R}e(e^{i\theta})$ et que $\sin\theta = \mathcal{I}m(e^{i\theta})$. Aussi, la proposition **??** permet de conclure puisque $\mathcal{R}e(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ et $\mathcal{I}m(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

Les formules d'addition et de soustraction des cosinus et des sinus permettent de montrer la proposition **??** sur les formes exponentielles de complexes. Mais il est également possible de faire le chemin inverse, *i.e.* de retrouver les formules de trigonométrie en utilisant l'écriture exponentielle des complexes.

a) Formules d'addition et de soustraction et de duplication

Théorème 2.

Pour tous réels a et b, on a :

(i) $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$;
(ii) $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$;
(iii) $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \sin b.\cos a$;
(iv) $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a$;
(v) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$;
(vi) $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$.

Preuve

Dans la démonstration de la proposition 5.1.**??**, nous avons déjà vu comment trouver les égalités (i) à (iv) avec l'écriture exponentielle de complexes. La preuve des deux dernières égalités se fait de la même manière et sera faite intégralement en exercice.

En particulier, on obtient les formules de duplication en prenant $a = b$... mais il est préférable de savoir retrouver ces formules très rapidement plutôt que de les apprendre par cœur.

b) Formules linéarisation

La formule d'Euler permet de linéariser les produits de cos et de sin en les exprimant en fonction de sommes de $\cos$ et $\sin$.

Exemples 2

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos x \sin x$.
On a :

$$\cos x \sin x = \frac{1}{4i}(e^{ix} + e^{-ix})(e^{ix} - e^{-ix}) = \frac{1}{4i}(e^{2ix} + 1 - 1 - e^{-2ix}) = \frac{1}{4i}(e^{2ix} - e^{-2ix}) = \frac{1}{2}\sin(2x).$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^2 x$.
On a :

$$\cos^2 x = \frac{1}{4}(e^{ix} + e^{-ix})^2 = \frac{1}{4}(e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}) = \frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} + 2) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}.$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^2 x$.
On a :

$$\sin^2 x = \frac{1}{4i^2}(e^{ix} - e^{-ix})^2 = \frac{-1}{4}(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix}) = \frac{-1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2) = -\frac{\cos(2x) - 1}{2} = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin^2 x \cos x$.
On a :

$$\begin{aligned}
\sin^2 x \cos x &= \frac{1}{8i^2}(e^{ix} - e^{-ix})^2(e^{ix} + e^{-ix}) \\
&= \frac{-1}{8}(e^{2ix} - 2 + e^{-2ix})(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\
&= \frac{-1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} - 2e^{ix} + e^{-ix} + e^{ix} - 2e^{-ix}) \\
&= \frac{-1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix} - e^{ix} - e^{-ix}) \\
&= \frac{-1}{4}(\cos(3x) - \cos x) \\
&= \frac{-\cos(3x) + \cos x}{4}.
\end{aligned}$$

• Soit a et $b \in \mathbb{R}$. Linéariser $\sin a \cos b$.
On a :

$$\begin{aligned}
\sin a \cos b &= \frac{1}{4i}(e^{ia} - e^{-ia})(e^{ib} + e^{-ib}) \\
&= \frac{1}{4i}(e^{i(a+b)} + e^{i(a-b)} - e^{-i(a-b)} - e^{-i(a+b)}) \\
&= \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}.
\end{aligned}$$

De la même manière, il existe des formules pour $\sin a \sin b$ et $\cos a \cos b$.

c) Formule de Moivre

Proposition 11 (formule de De Moivre (communément appelée « formule de Moivre »)).

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Remarque

Couplée à la formule $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule de Moivre permet de passer de $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ à une somme de puissance de $\cos x$ et de $\sin x$.

Preuve

On a :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exemples 3

• Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de puissance de $\cos x$ et de $\sin x$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de puissance de $\cos x$ et de $\sin x$.
On a :

$$\cos(3x) = \mathcal{R}e(\cos(3x) + i\sin(3x)) = \mathcal{R}e\left((\cos x + i\sin x)^3\right) \text{ par la formule de Moivre.}$$

Or on a également :

$$\begin{aligned}(\cos x + i\sin x)^3 &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x + 3i^2\cos x\sin^2 x + i^3\sin^3 x \text{ par le binôme de Newton,}\\ &= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x\\ &= (\cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x) + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x).\end{aligned}$$

On en déduit finalement :

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x.$$

• Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ en fonction de puissance de $\cos x$ et de $\sin x$.
On a :

$$\begin{aligned}\cos(nx) + i\sin(nx) &= (\cos x + i\sin x)^n \text{ (formule de Moivre),}\\ &= \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}\cos^k x\sin^{n-k}x \text{ (binôme de Newton),}\\ &= \sum_{\substack{k \text{ pair}\\ 0\leq k\leq n}}\binom{n}{k}i^k\sin^k x\cos^{n-k}x + \sum_{\substack{k \text{ impair}\\ 0\leq k\leq n}}\binom{n}{k}i^k\sin^k x\cos^{n-k}x\\ &= \sum_{0\leq 2p\leq n}\binom{n}{k}(-1)^p\sin^{2p}x\cos^{n-2p}x + i\sum_{0\leq 2p+1\leq n}\binom{n}{k}(-1)^p\sin^{2p+1}x\cos^{n-2p-1}x.\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient alors :

$$\cos(nx) = \sum_{0\leq 2p\leq n}\binom{n}{k}(-1)^p\sin^{2p}x\cos^{n-2p}x \text{ et } \sin(nx) = \sum_{0\leq 2p+1\leq n}\binom{n}{k}(-1)^p\sin^{2p+1}x\cos^{n-2p-1}x.$$

d) Factorisation par l'angle de moitié

Les formules d'Euler apportent une technique classique de manipulation des sommes ou les différences de complexes de module 1, c'est la **factorisation par l'angle de moitié**. On considère par exemple $e^{ia}+e^{ib}$, alors on peut factoriser par $e^{i\frac{a+b}{2}}$, pour obtenir :

$$e^{ia}+e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)=2e^{i\frac{a+b}{2}}\cos(\frac{a-b}{2}).$$

Les formules trouvées dans les exemples qui suivent doivent pouvoir être retrouvées très rapidement ; elles sont explicitement au programme de PCSI.

Exemples 4

• Soit $x\in\mathbb{R}$. Factoriser $1+e^{ix}$.
On a :

$$1+e^{ix}=e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}+e^{i\frac{x}{2}}\right)=2e^{i\frac{x}{2}}\cos(\frac{x}{2}).$$

• Soit $x\in\mathbb{R}$. Factoriser $1-e^{ix}$.
On a :

$$1-e^{ix}=e^{i\frac{x}{2}}\left(e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}\right)=-2ie^{i\frac{x}{2}}\sin(\frac{x}{2}).$$

• La factorisation par l'angle de moitié permet également de trouver les formules de Simpson qui donnent des égalités de $\sin a\pm\sin b$ et de $\cos a\pm\cos b$ pour tout a et $b\in\mathbb{R}$. Si a et $b\in\mathbb{R}$, factoriser $\sin a+\sin b$.
On a :

$$\begin{aligned}\sin a+\sin b&=\mathcal{I}m\left(e^{ia}+e^{ib}\right)\\&=\mathcal{I}m\left(e^{i\frac{a+b}{2}}(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{-i\frac{a-b}{2}})\right)\\&=\mathcal{I}m\left(2\cos(\frac{a-b}{2})e^{i\frac{a+b}{2}}\right)\\&=\mathcal{I}m\left(2\cos(\frac{a-b}{2})\left((\cos(\frac{a+b}{2})+i\sin(\frac{a+b}{2})\right)\right)\\&=2\cos(\frac{a-b}{2})\sin(\frac{a+b}{2}).\end{aligned}$$

D'autres formules de Simpson seront à retrouver en exercice.

e) Calculs de somme

Exemple 5

Soit $n \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes définies par

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx) \text{ et } S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx).$$

On a :

$$C_n + iS_n = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

car on reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

— si $e^{ix} = 1 \Leftrightarrow x \equiv 0[2\pi]$ alors $C_n + iS_n = \sum 1 = n+1$. Donc par unicité de la forme algébrique, on a $C_n = n+1$ et $S_n = 0$.

— si $e^{ix} \neq 1$, pour connaître C_n et S_n, il suffit dès lors d'identifier les parties réelle et imaginaire de $\dfrac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$.
Or par factorisation par l'angle moitié on a :

$$\begin{aligned}\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} &= \frac{e^{i(\frac{(n+1)x}{2})}(e^{i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)x}{2}})}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}})} \\ &= \frac{-2ie^{i\frac{n+1}{2}x}\sin(\frac{n+1}{2}x)}{-2ie^{i\frac{1}{2}x}\sin(\frac{x}{2})} \\ &= e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.\end{aligned}$$

On conclue :

$$C_n = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \mathcal{R}e\left(e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}$$

et

$$S_n = \mathcal{I}m\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) = \mathcal{R}e\left(e^{i\frac{n}{2}x}\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}\right) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\frac{\sin(\frac{n+1}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

VI Racines n-ièmes de complexes

VI.A Racines n-ièmes de l'unité

Définition 10 (racine n-ième de l'unité, $\mathbb{U}_n$)**.**

Soit $n \geq 1$. Une **racine n-ième de l'unité** est un complexe solution de l'équation $X^n - 1 = 0$. L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n$.

Théorème 3.

Soit $n \geq 1$. Alors on a :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2i\pi k}{n}} \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\} = \left\{ 1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, \ldots, , e^{\frac{2i\pi(n-1)}{n}} \right\}.$$

Il existe en particulier n racines n-ièmes distinctes de l'unité.

Preuve

Soit z solution (complexe) de l'équation $X^n = 1$. Le complexe z est alors non nul ; il s'écrit donc sous la forme $re^{i\theta}$ pour un unique couple (r, θ) avec $\theta \in [0, 2\pi[$ et $r > 0$. On a alors :

$$z^n = 1 \iff r^n e^{in\theta} = 1 \iff \begin{cases} r^n = 1 \\ n\theta \equiv 0 \mod 2\pi \end{cases} \iff \begin{cases} r = 1 \\ \theta \equiv 0 \mod \dfrac{2\pi}{n} \end{cases}.$$

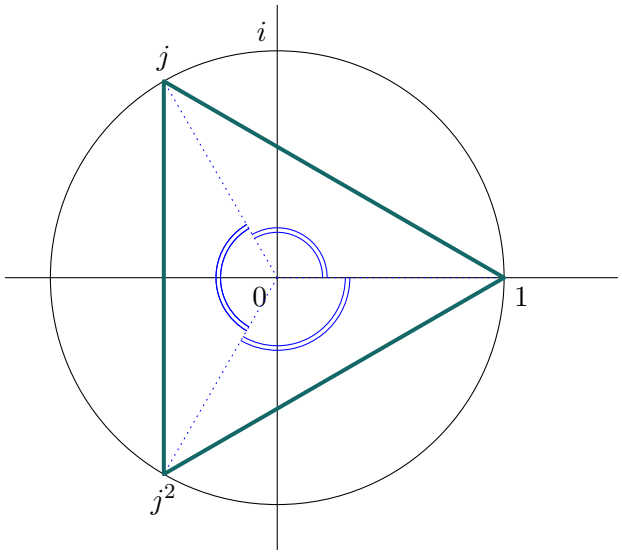
Et comme $\theta \in [0, 2\pi[$, il vient n possibilités : $k = 0$, $\dfrac{2\pi}{n}$, $\dfrac{4\pi}{n}$, $\ldots$, $\dfrac{2\pi(n-1)}{n}$ (puisqu'à part de $\dfrac{2\pi n}{n}$, les angles ne sont plus dans l'intervalle $[0, 2\pi[$). La conclusion est à présent évidente.

Comme de nombreux points de ce chapitre, ce résultat a une interprétation géométrique. Multiplier deux complexes de module 1 revient à additionner les arguments ; aussi, élever à la puissance n équivaut à multiplier l'angle par n.

Pour représenter les points associés aux racines n-ièmes de l'unité, il faut donc découper le cercle en secteur angulaire égaux. On obtient donc la proposition et le dessin qui suivent.

Proposition 12.

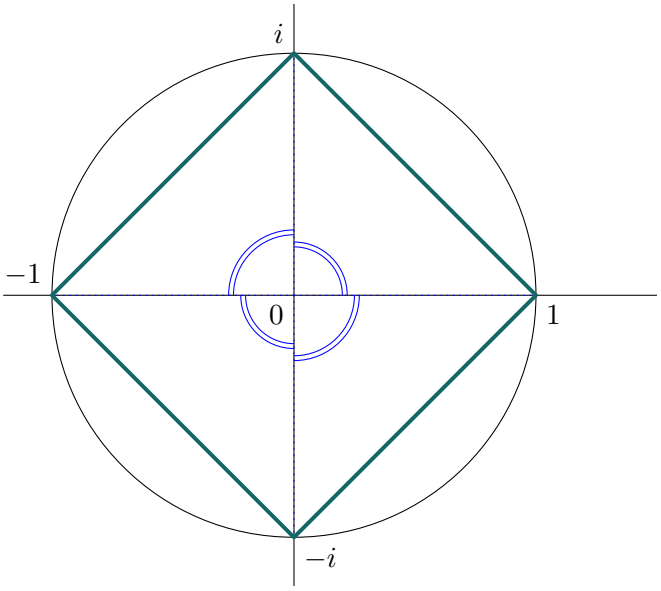
Les points du plan complexe associés aux racines n-ièmes de l'unité forment les n sommets d'un polygone régulier convexe inscrit dans le cercle unité, l'un de ces sommets étant le point d'affixe 1.



Racines 3-ièmes de l'unité.

Les racines 3-ième de l'unité sont souvent appelées $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\overline{j} = j^2 = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$. Ainsi :

$$\mathbb{U}_3 = \{1, j, \overline{j}\}.$$

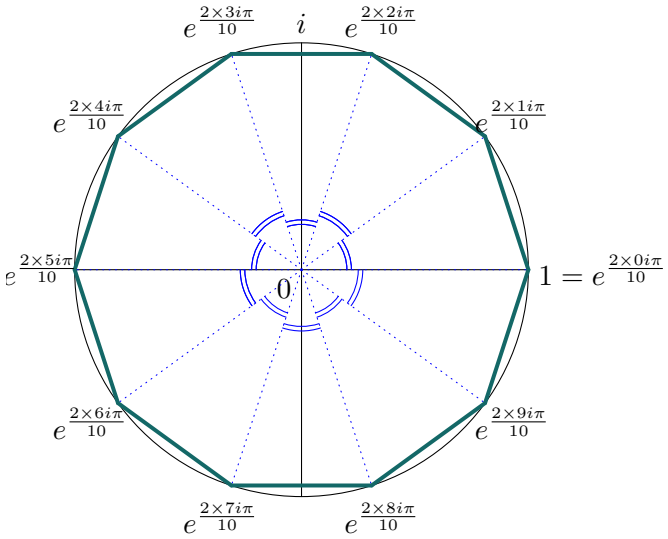


Racines 4-ièmes de l'unité.

En effet, par le théorème précédent, on sait que :

$$\mathbb{U}_4 = \left\{1, e^{\frac{i\pi}{2}}, e^{i\pi}, e^{\frac{3i\pi}{2}}\right\}.$$

Or $e^{i\frac{i\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$ et $e^{i\frac{3i\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$. On retrouve alors le dessin.



Racines 10-ièmes de l'unité.

Proposition 13.

Soit $n \geq 2$. Alors la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle. Autrement, si z est une racine n-ième de l'unité distincte de 1, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0.$$

Preuve

Comme $z \neq 1$, en appliquant la formule sur la somme des premiers termes d'une suite géométrique, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} = 0.$$

VI.B Généralisation : racines n-ièmes de complexes

Théorème 4.

Soit $a = re^{i\theta}$ un complexe non nul écrit sous la forme exponentielle (donc en particulier $r > 0$). Alors l'équation $X^n = a$ admet exactement n solutions distinctes qui sont :

$$\sqrt[n]{r}e^{\frac{2i\pi k+\theta}{n}} \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!].$$

Preuve

Soit $z_1 = \sqrt[n]{r}e^{\frac{2i\pi+\theta}{n}}$; c'est clairement une solution (forcément non nulle puisque a n'est pas nul) de l'équation $X^n = a$ puisque :

$$z_1^n = \left(\sqrt[n]{r}e^{\frac{2i\pi+\theta}{n}}\right) = \sqrt[n]{r}^n e^{n\frac{2i\pi+\theta}{n}} = re^{2i\pi+\theta} = re^{\theta} = a.$$

On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff z^n = z_1^n \iff \frac{z^n}{z_1^n} = 1 \iff \left(\frac{z}{z_1}\right)^n = 1 \\ &\iff \frac{z}{z_1} \in \mathbb{U}_n \\ &\iff z = z_1 e^{\frac{2i\pi k}{n}} \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!] \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat escompté.

L'interprétation géométrique de ce résultat est moins intéressant que dans le cas des racines de l'unité. Les solutions de cette équation $X^n = a$ sont les sommets du polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt[n]{r}$ et dont le premier sommet est, par exemple, le point d'affixe $\sqrt[n]{r}e^{\frac{2i\pi+\theta}{n}}$.

VII Exponentielle complexe

Définition 11 (exponentielle complexe)**.**

• Soit $z = a + ib$ un nombre complexe écrit sous sa forme algébrique. L'exponentielle de z, notée e^z ou $\exp(z)$, est défini par :

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

• L'exponentielle complexe, notée $e^{\cdot}$ ou $\exp$, définie par :

$$\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{cases}$$

est un prolongement de l'exponentielle réelle.

Proposition 14.

Soit a et $b \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $e^{a+b} = e^a \times e^b$;
2. $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;
3. $(e^a)^n = e^{na}$ pour tout $n \geq 0$.

Remarque

L'exponentielle complexe se comporte exactement comme la fonction exponentielle réelle.

Preuve

Ces propriétés algébriques de l'exponentielle complexe découle de celles de l'exponentielle réelle et de celle de e^{it} avec $t \in \mathbb{R}$.

Proposition 15.

L'application $\exp : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & e^z \end{cases}$ est surjective mais n'est pas injective. En effet, on a :

$$e^z = e^{z'} \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}.$$

Preuve

Soit $z = re^{i\theta}$ un nombre complexe écrit sous une de ses formes exponentielles. Posons $t = \ln r + i\theta$. Alors :

$$e^t = e^{\ln r + i\theta} = e^{\ln r} e^{+i\theta} = re^{+i\theta}.$$

Ainsi, il existe un antécédent de z, t en l'occurrence. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$, on conclue que l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est surjective.

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux complexes écrits sous leur forme algébrique, *i.e.* avec a, b, a' et $b' \in \mathbb{R}$. On a alors les équivalences suivante :

$$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\iff e^a e^{ib} = e^{a'} e^{ib'} \iff \begin{cases} |e^a e^{ib}| = |e^{a'} e^{ib'}| \\ \arg(e^a e^{ib}) \equiv \arg(e^{a'} e^{ib'}) \mod 2\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} e^a = e^{a'} \text{ car } b,\, b' \in \mathbb{R} \\ b \equiv b' \mod 2\pi \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a = a' \text{ en utilisant } \ln \text{ ou l'injectivité de l'exponentielle réelle,} \\ b \equiv b' \mod 2\pi \end{cases} \\ &\iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Aussi, l'exponentielle complexe n'est pas injective ou l'on a trouvé la condition nécessaire et suffisante recherchée.

VIII Équations du second degré

VIII.A Racines carré d'un nombre complexe

Définition 12 (racines carré)**.**

Soit a un nombre complexes non nul. Par le théorème précédent**??**, l'équation $X^2 = a$ admet deux solutions opposées dans $\mathbb{C}$; ces solutions sont les **racines carré de** a.

⚠ La notation $\sqrt{\cdot}$ n'existe pas dans $\mathbb{C}$. La notation $\sqrt{t}$ avec $t \in \mathbb{R}^+$ sert à mettre en avant la racine carré de t la plus simple, *i.e.* la racine positive.

Lorsque $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, il n'y a pas une racine plus agréable à manipuler que l'autre, il n'y a pas de raison d'en mettre une plutôt que l'autre en avant donc la notation $\sqrt{\cdot}$ n'a pas lieu d'être.

Méthode 1.

Soit z un complexe non nul dont on aimerait trouver une racine carré ω.
• Si z est écrit sous une forme exponentielle, $z = re^{i\theta}$, il est facile de trouver ses racines carré : $\omega = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ ou $\omega = \sqrt{r}e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}$. Notons que comme $z = re^{i\theta}$ est une forme exponentielle de z, on a obligatoirement $r > 0$.
• Si, en revanche $z = a + ib$ n'est pas écrit sous une forme exponentielle et que celle-ci semble difficile à trouver, alors on pose $\omega = x + iy$ la forme algébrique d'une racine carré de z. Il va falloir résoudre le système d'équations que l'on obtient à la fin :

Exemple 6

Déterminons les racines carrés du complexe $z = 3 - 4i$.

Il sera difficile de déterminer l'argument de ce complexe car il faut connaître un angle θ vérifiant $\cos\theta = \frac{3}{5}$. Posons donc $\omega = x + iy$ la forme algébrique d'une raciné carré de z. On a alors :

$$\omega^2 = 3 - 4i \iff \begin{cases} \omega^2 = 3 - 4i \\ |\omega^2| = |3 - 4i| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = -2 \end{cases} \iff (x, y) = (2, -1) \text{ ou } (x, y) = (-2, 1)$$

$$\iff \omega = 2 - i \text{ ou } -2 + i.$$

VIII.B Équations quelconque du second degré

Théorème 5 (solutions des équations du second degré à coefficients complexes).

Soit a, b, c trois nombres complexes avec $a \neq 0$. Soit E l'équation :

$$(E) : \ aX^2 + bX + c = 0.$$

Le **discriminant** de E, noté Δ, est défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Soit δ une racine carré de Δ. Alors les solutions de l'équation (E) sont :

$$z_1 = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}.$$

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Remarques

• Les solutions z_1 et z_2 sont distinctes si, et seulement si, $\Delta \neq 0$.
• Si a, b et c ne sont pas réels, alors les solutions z_1 et z_2 ne sont plus forcément conjuguées.
• Il y a deux choix possibles pour δ. Prendre une racine de Δ plutôt qu'une autre ne fait qu'inverser le nom des solutions.

Preuve

On a :

$$\begin{aligned}
aX^2+bX+c &= a\left(X^2+\frac{b}{a}X+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left((X+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)\\
&= a\left((X+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)\\
&= a\left(\left(X+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\delta}{2a}\right)^2\right) \text{ puisque } \delta^2=\Delta \text{ par définition,}\\
&= a\left(X+\frac{b}{2a}-\frac{\delta}{2a}\right)\left(X+\frac{b}{2a}+\frac{\delta}{2a}\right) \text{ grâce à l'identité remarquable } (r-s)(r+s)\\
&= a(z-z_1)(z-z_2).
\end{aligned}$$

Comme de plus un produit est nul si, et seulement si, l'un des termes l'est, il en découle :

$$aX^2+bX+c=0 \Longleftrightarrow \begin{cases} z=z_1 \\ \text{ ou} \\ z=z_2 \end{cases}.$$

Définition 13 (forme développée, forme canonique et forme factorisée d'une équation de degré 2)**.**

Soit a, b, c trois nombres complexes avec $a\neq 0$.
- Soit E l'équation (E) : $aX^2+bX+c=0$; cette écriture est la **forme développée** de E.
- Il existe α et $\beta\in\mathbb{C}$ tels que $E \Longleftrightarrow a\left((X+\alpha)^2-\beta\right)$; c'est la **forme canonique** de E.
- Soit z_1 et z_2 les solutions de E. Alors $E \Longleftrightarrow a(z-z_1)(z-z_2)=0$; c'est la **forme factorisée** de E.

Remarque

Dans la démonstration du théorème précédent, nous avons exprimé α et β en fonction de a, b et c :

$$\alpha=\frac{b}{2a} \text{ et } \beta=\frac{\Delta}{4a^2}.$$

Réciproquement, pour avoir b et c en fonction de a, α et β, il suffit de développer la forme canonique.

Exemple 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $X^2 + (4-2i)X - i = 0$.

Soit $a = 1$, $b = 4-2i$ et $c = -i$. Soit Δ le discriminant de l'équation ; alors :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4-2i)^2 + 4i = 12 - 12i = 12(1-i).$$

Déterminer une racine carré de Δ écrit sous sa forme algébrique est faisable, mais pas pratique. Passons donc à son écriture exponentielle.

On a : $|\Delta| = 12\sqrt{2}$ et, si θ désigne un argument de Δ, alors :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{12}{12\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{-12}{12\sqrt{2}} = \dfrac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

donc $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ (modulo 2π) ce qui donne $\Delta = 12\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$. Soit $\delta = \sqrt{12\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}}$; alors δ est bien une racine carré de Δ puisque $\delta^2 = \Delta$. Dès lors, les solutions de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{-4+2i+\sqrt{12\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{-4+2i-\sqrt{12\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}}}{2}$$

et, après simplification :

$$z_1 = -2+i+\sqrt{3\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}} \text{ et } z_2 = -2+i-\sqrt{3\sqrt{2}}e^{\frac{3i\pi}{8}}.$$

Nous venons de voir qu'il était possible de trouver les racines d'un polynôme de degré à l'aide de ses coefficients mais il est également possible de faire le chemin inverse, *i.e.* de trouver les coefficients du polynôme à l'aide de ses racines.

Proposition 16.

Soit a, b, s et p quatre nombres complexes. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. a et b sont solutions de l'équation $X^2 - sX + p = 0$;
2. $s = a+b$ et $p = ab$.

Preuve

On a l'équivalence suivante :

$$a \text{ et } b \text{ solutions de } X^2 - sX + p = 0 \iff X^2 - sX + p = (X-a)(X-b)$$

Or $(X-a)(X-b) = X^2 - (a+b)X + ab$; dès lors, l'équivalence entre (i) et (ii) est évidente.

IX Nombres complexes et géométrie plane

IX.A Problèmes classiques de géométrie et complexes

Définition 14 (affixe d'un vecteur)**.**

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ du plan complexe. L'**affixe** du vecteur $\vec{u}$ est le complexe $z = a + ib$.

Proposition 17.

Soit A et B deux points du plan complexe d'affixe respective z_A et z_B. L'**affixe** du vecteur $\overrightarrow{AB}$, est $z_b - z_A$.

Preuve

C'est le fruit d'un résultat de Seconde. Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Proposition 18.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$ d'affixe z. Alors :

$$||\overrightarrow{u}|| = |z|.$$

Preuve

Les formules définissant $||\overrightarrow{u}||$ et $|z|$ sont exactement les mêmes.

Partant de ces similitudes, il est possible de ramener des problèmes géométriques à des problèmes complexes (et donc, souvent, de calculs).

Proposition 19 (traduction de la colinéarité et de l'alignement)**.**

1. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes z_u et z_v. Alors on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ colinéaires } &\iff \mathcal{I}m(z_u\overline{z_v}) = 0 \\ &\iff z_u\overline{z_v} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
2. Soit A, B et C trois points distincts de $\mathbb{R}^2$ d'affixe a, b et c. Alors on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} A, B \text{ et } C \text{ alignés } &\iff \mathcal{I}m((c-a)(\overline{c}-\overline{b})) = 0 \\ &\iff (c-a)(\overline{c}-\overline{b}) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Preuve

1. La seconde équivalence est évidente, prouvons la première. Pour cela, posons $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. On a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ colinéaires } &\iff ab' = a'b \\ &\iff ab' + a'(-b) = 0 \\ &\iff \mathcal{I}m(z_u\overline{z_v}) = 0 \text{ car } \overline{z_v} = a' - ib'. \end{aligned}$$
2. est une conséquence immédiatement de (i) et de la proposition $9.0.$**??** puisque A, B et C sont alignées si, et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

Proposition 20 (traduction de l'orthogonalité).

1. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ d'affixes z_u et z_v. Alors le produit scalaire (usuel) de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est donné par :
$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= Re(z_u\overline{z_v}).$$
2. Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ d'affixes z_u et z_v. Alors on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ orthogonaux} &\iff Re(z_u\overline{z_v}) = 0\\ &\iff z_u\overline{z_v} \in i\mathbb{R}.\end{aligned}$$

Preuve

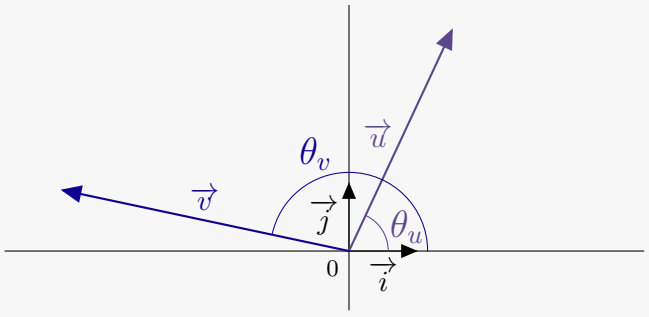
1. Posons $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$. On a alors :
$$< \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= aa' + bb'.$$
D'autre part, $\overline{z_v} = a' - ib'$ donc $\mathcal{R}e(z_u\overline{z_v}) = aa' - b(-b') = aa' + bb'$. La conclusion est alors claire.
2. C'est une conséquence directe du point précédent et de l'équivalence :
$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ orthogonaux} \iff < \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} >= 0.$$

Proposition 21 (traduction des angles).

Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_u et z_v respectivement. Alors :
$$(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \arg\left(\frac{v}{u}\right).$$

Preuve

On comprend ce qu'il se passe sur le dessin suivant. Soit θ_u et θ_v les arguments respectifs de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$.



On a alors $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \theta_v - \theta_u$. De plus, par la proposition 4.2.**??**, on sait que $\arg\left(\frac{z_v}{z_u}\right) = \theta_v - \theta_u$.

IX.B Transformations du plan

Proposition 22.

On considère le plan complexe $\mathcal{P}$. Il existe une bijection canonique entre l'ensemble des applications $F : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{P}$ et l'ensemble des applications de $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Preuve

La bijection de la proposition peut être construite explicitement. On définit en effet deux applications réciproques l'une de l'autre part :

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{P}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C}) \\ F & \longmapsto & f \end{cases} \text{ où } f(z) = z' \text{ si, et seulement si, } F(M_z) = M_{z'}.$$

et :

$$\psi : \begin{cases} \mathcal{F}(\mathbb{C},\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{P},\mathcal{P}) \\ f & \longmapsto & F \end{cases} \text{ où } F(M_z) = M_{z'} \text{ si, et seulement si, } f(z_M) = z_{M'}.$$

Les définitions-mêmes de ces deux applications entraînent qu'elles sont bien réciproques l'une de l'autre.

Aussi, il est possible de traduire les transformations essentielles du plan en terme de complexe. Ainsi, comme nous l'avons vu dans le paragraphe **??**, la traduction en terme de complexes de la symétrie axiale de droite l'axe des abscisses est la conjugaison. De la même manière, les translations, les homothéties ou les rotations peuvent être traduites en terme de complexes (il en est de même de toutes symétries axiales... mais ce n'est pas au programme).

Définition 15 (translation)**.**

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan complexe. La **translation** de vecteurs $\overrightarrow{u}$ est l'application du plan qui, à tout point M associe l'unique point vérifiant :

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}.$$

Proposition 23.

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan complexe d'affixe z_u. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ correspond dans $\mathbb{C}$ à la fonction $z \longmapsto z + z_u$.

Preuve

Soit M un point du plan d'affixe z. D'après la proposition 9.1.**??**, le point B d'affixe $z + z_u$ vérifie :

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{u}$$

Aussi, B est donc l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$. La proposition est ainsi démontrée.

Définition 16 (rotation)**.**

Soit A un point du plan et $\theta \in \mathbb{R}$. La **rotation** de centre A et d'angle θ est l'application du plan qui, à tout point M associe l'unique point vérifiant :

$$AM = AM' \text{ et } (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \theta \mod 2\pi.$$

Proposition 24.

Soit A un point du plan d'affixe z_A et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre A et d'angle θ (dans le sens trigonométrique, ou direct) correspond dans $\mathbb{C}$ à la fonction $z \longmapsto z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$.

Preuve

Soit M un point du plan d'affixe z et B le point d'affixe $z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$. D'après la proposition 9.1.**??**, on sait que l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $e^{i\theta}(z - z_A)$ et que celui de $\overrightarrow{AM}$ est $z - z_A$. Aussi, grâce à l'interprétation géométrique du module, le point B d'affixe $z_A + e^{i\theta}(z - z_A)$ vérifie d'une part :

$$AB = |z_A + e^{i\theta}(z - z_A) - z_A| = |e^{i\theta}(z - z_A)| = |z - z_A| = AM.$$

et, grâce à la traduction des angles en termes de complexes, le point B vérifie d'autre part :

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) = \arg\left(\frac{e^{i\theta}(z - z_A)}{z - z_A}\right) \equiv \theta \mod 2\pi.$$

On en déduit que B est l'image de M par la rotation de centre A et d'angle θ. La proposition est ainsi démontrée.

Définition 17 (homothétie).

Soit A un point du plan d'affixe z_A et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. L'homothétie de centre A et de rapport λ est l'application du plan qui, à tout point M associe l'unique point vérifiant :

$$\overrightarrow{AM'} = \lambda \overrightarrow{AM}.$$

Remarque

Lorsque $\lambda = -1$, on obtient la symétrie centrale de centre A.

Proposition 25.

Soit A un point du plan d'affixe z_A et $\lambda \in \mathbb{R}^+$. L'homothétie de centre A et de rapport λ correspond dans $\mathbb{C}$ à la fonction $z \longmapsto z_A + \lambda(z - z_A)$.

Preuve

Soit M un point du plan d'affixe z et B le point d'affixe $z_A + \lambda(z - z_A)$. D'après la proposition 9.1.**??**, l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $\lambda(z - z_A)$ et l'affixe de $\overrightarrow{AM}$ est $z - z_A$. On en déduit que B est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport λ : la proposition est ainsi prouvée.