Chapitre 14

Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $X \subset \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$.

1 Généralités sur les fonctions

1.1 Propriétés algébriques de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$

On munit $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ de deux lci $+$ et $\times$ et d'une lce $\cdot$, définies par :

$$\begin{aligned} \forall x \in X,\ (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ \forall x \in X,\ (f \times g)(x) &= f(x) \times g(x) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X,\ (\lambda \cdot f)(x) &= \lambda \times f(x) \end{aligned}$$

Définition 1.1 (*i*) *Soit $g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ telle que $\forall x \in X$, $g(x) \neq 0$. On définit $\dfrac{1}{g} : X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$.*

(*ii*) *Soient $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ telles que $\forall x \in X$, $g(x) \neq 0$. $\dfrac{f}{g} : X \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$.*

Définition 1.2 (*i*) $|f| : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |f(x)|$

(*ii*) *Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on définit $\overline{f} : X \to \mathbb{C}$, $x \mapsto \overline{f(x)}$, $\Re f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Re(f(x))$ et $\Im f : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \Im(f(x))$.*

1.2 Propriétés globales d'une fonction

1.2.1 Fonctions de $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$

Définition 1.3 *Soient $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, $k \in \mathbb{R}_+^*$. On dit que f est k-lipschitzienne ssi $\forall (x, y) \in X^2$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.*

Ex : $x \mapsto \lambda x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont-elles lipschitziennes sur $[1, +\infty[$? Sur $[0, 1]$?

Application : étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est k-lipschitzienne avec $0 < k < 1$.

Définition 1.4 *$f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in X$, $|f(x)| \leq M$.*

Rq : $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ est bornée ssi f est majorée et minorée.

1.2.2 Fonctions numériques réelles : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Définition 1.5 *Soit $X \subset \mathbb{R}$. On définit une relation dans $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$, notée $\leq$, par :*

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^X,\ f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in X,\ f(x) \leq g(x).$$

Définition 1.6 *Soient $f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.*

$$\sup(f, g) : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sup(f(x), g(x)) \qquad \inf(f, g) : X \to \mathbb{R},\ x \mapsto \inf(f(x), g(x))$$

Proposition-Définition 1.7 *Si $f : X \to \mathbb{R}$ est majorée (resp. minorée), alors $f(X)$ admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure), appelée borne supérieure de f (resp. borne inférieure de f), et notée $\sup\limits_{x \in X} f(x)$ (resp. $\inf\limits_{x \in X} f(x)$).*

2 Limites

2.1 Définitions

2.1.1 Notion de voisinage

Définition 2.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

(i) On appelle intérieur de I, et on note $\overset{\circ}{I}$ l'intervalle ouvert de mêmes extrémités que I.

(ii) On appelle adhérence de I, et on note $\overline{I}$, l'intervalle fermé de mêmes extrémités que I.

Ex : déterminer l'intérieur et l'adhérence des intervalles suivants : $[2, 3[$, $[3, +\infty[$, $]3, +\infty[$.

Définition 2.2 *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(i) Si $a \in \mathbb{R}$: $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de a ssi $\exists \eta > 0$ tel que $[a - \eta, a + \eta] \subset V$.

(ii) Si $a = +\infty$: $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ ssi $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $[c, +\infty[\subset V$.

(iii) Si $a = -\infty$: $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ ssi $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $]-\infty, c] \subset V$.

On note $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

On dira qu'une propriété portant sur une fonction défine sur I est vraie au voisinage de $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ssi $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f\big|_{I \cap V}$ vérifie cette propriété.

Ex : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est-elle bornée au voisinage de $+\infty$? de 0 ? La fonction sin est-elle croissante au voisinage de $+\infty$? de 0 ? et cos ?

2.1.2 Notion de limite

Définition 2.3 *Soit $f : I \to \mathbb{K}$, et soit $\ell \in \mathbb{K}$.*

(i) *Si I admet $+\infty$ comme extrémité, f admet pour limite ℓ en $+\infty$ ssi*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} \ell$. On définit de même $f(x) \underset{x\to-\infty}{\to} \ell$ par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \leq A \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

(ii) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si I admet $+\infty$ comme extrémité, on dit que f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ ssi*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists A' \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ x \geq A' \Rightarrow f(x) \geq A.$$

On note $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$. On définit de même $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} -\infty$, $f(x) \underset{x\to-\infty}{\to} +\infty$ et $f(x) \underset{x\to-\infty}{\to} -\infty$.

Définition 2.4 *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ et soit $\ell \in \mathbb{K}$.*

(i) *Soit $a \in \overline{I}$. On dit que f admet pour limite ℓ en a ssi*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon.$$

On écrit $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$.

(ii) *Soit $a \in \overline{I}$. On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a ssi*

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x - a| \leq \eta \Rightarrow f(x) \geq A.$$

On note $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$. On définit de même $f(x) \underset{x\to a}{\to} -\infty$.

En fait, si $a \in \overline{\mathbb{R}}$ est un point au voisinage duquel f est définie, $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ssi :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell),\ \exists V' \in \mathcal{V}(a),\ \forall x \in I,\ x \in V' \Rightarrow f(x) \in V.$$

2.1.3 Propriétés des limites

Proposition-Définition 2.5 (unicité de la limite) *Soit $f : I \to \mathbb{K}$. Si f admet pour limite ℓ et ℓ' en a, alors $\ell = \ell'$. On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.*

Proposition 2.6 *Soit $f : I \to \mathbb{K}$ admettant une limite finie en a. Alors, f est bornée dans un voisinage de a.*

Proposition 2.7 (caractérisation séquentielle des limites) *Soit $f : I \to \mathbb{K}$.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \Leftrightarrow (\forall (u_n)_n \in I^{\mathbb{N}},\ (\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell)).$$

Définition 2.8 *Soient $f : I \to \mathbb{K}$, $\ell \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $a \in \overline{I}$. f admet ℓ pour limite à gauche (resp. à droite) en a ssi $f\big|_{]-\infty,a[\cap I}$ (resp. $f\big|_{]a,+\infty[\cap I}$) admet pour limite ℓ en a. On note alors $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \ell$. (resp. $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} a} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell$).*

2.2 Opérations algébriques sur les limites

2.2.1 Limites finies

Proposition 2.9 *Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\ell, \ell') \in \mathbb{K}^2$.*

(i) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\ell|$.

(ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$.

(iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} (\lambda f)(x) = \lambda\ell$.

(iv) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ *et g bornée dans un voisinage de a* $\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = 0$.

(v) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ *et* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} (f+g)(x) = \ell + \ell'$ *et* $\lim\limits_{x\to a} (fg)(x) = \ell\ell'$.

(vi) $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell' \neq 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\ell'}$.

Ex : déterminer $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\cos x - 1}{x - \frac{\pi}{3}}$.

Théorème 2.10 *Soit $f : I \to \mathbb{C}$, soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to a} \Re f(x) = \alpha \\ \lim\limits_{x\to a} \Im f(x) = \beta \end{cases}$$

2.2.2 Cas des limites infinies

Proposition 2.11 *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$.*

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$g \geq m$ *(CP : converge)*	$+\infty$	$g \leq M$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	???

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$g \geq m > 0$	$g \leq M < 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	???

2.2.3 Composition des limites

Proposition 2.12 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Soit $g : J \to \mathbb{K}$, soient $b \in \overline{J} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\ell \in \mathbb{K} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = \ell$, alors, $\lim\limits_{x\to a} (g \circ f)(x) = \ell$.*

2.3 Ordre et limite

À partir de maintenant, on se limite aux fonctions à valeurs réelles.

2.3.1 Limites et inégalités

Proposition 2.13 *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$, *soit* $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(i) *Soit* $c < \ell$. *Alors,* $c \leq f(x)$ *dans un voisinage de* a.

(ii) *Soit* $d > \ell$. *Alors,* $d \geq f(x)$ *dans un voisinage de* a.

(iii) *Soit* $c < \ell < d$. *Alors,* $c \leq f(x) \leq d$ *dans un voisinage de* a, *cad* $\exists \eta > 0$, $\forall x \in I$, $|x-a| \leq \eta \Rightarrow c \leq f(x) \leq d$.

Application : signe de f dans $V(a)$.

Théorème 2.14 (passage à la limite dans une inégalité) *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$, *soient* $c, d \in \mathbb{R}$, $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

(i) $f(x) \geq c$ *dans un voisinage de* $a \Rightarrow \ell \geq c$.

(ii) $f(x) \leq d$ *dans un voisinage de* $a \Rightarrow \ell \leq d$.

Attention aux inégalités strictes !

Théorème 2.15 (d'encadrement) *Soient* $f, g, h : I \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ *et* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *dans un voisinage de* a, *alors* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Ex : $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Théorème 2.16 (de comparaison) *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$. *Si* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *et* $f(x) \leq g(x)$ *dans un voisinage de* a, *alors* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

2.3.2 Fonctions monotones

Théorème 2.17 *Soient* $a < b$ $(b \in \overline{\mathbb{R}})$, *et soit* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *croissante.*

(i) *Si* f *est majorée, alors* f *admet une limite finie en* b *et* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{x\in]a,b[} f(x)$.

(ii) *Si* f *n'est pas majorée, alors* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.

3 Continuité

3.1 Généralités

3.1.1 Continuité en un point

Définition 3.1 *Soient* $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$. f *est continue en* a *ssi* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ *ssi*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in I,\ |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

f *est discontinue en* a *ssi elle n'est pas continue en* a.

Proposition 3.2 *Soit* $f : I \to \mathbb{K}$, f *continue en* $a \in I$. *Alors,* f *est bornée au voisinage de* a.

Proposition 3.3 (caractérisation séquentielle de la continuité) *Soit* $f : I \to \mathbb{K}$. f *est continue en* a *ssi* $\forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

3.1.2 Continuité globale

Définition 3.4 *Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est continue sur I ssi f est continue en chacun des points de I. On note $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.*

Définition 3.5 *Soit $f : I \to \mathbb{K}$, soit $J \subset I$. On dit que f est continue sur J ssi $f\big|_J$ est continue.*

Ex : que peut-on dire de $1_{\mathbb{Q}}$? Est-elle continue ? Si oui, sur quel ensemble ?

3.2 Opérations algébriques sur les applications continues

Proposition 3.6 *Soient $a \in I$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $f, g : I \to \mathbb{K}$.*

(*i*) *f, g continues en $a \Rightarrow f + g$ et $f \times g$ continues en a.*

(*ii*) *f continue en $a \Rightarrow \lambda f$ continue en a.*

(*iii*) *g continue en a et $g(a) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{1}{g}$ continue en a.*

(*iv*) *f, g continues en a et $g(a) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{f}{g}$ continue en a.*

(*v*) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, f continue en $a \Rightarrow \overline{f}$ continue en a.*

Proposition 3.7 *Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{K}$ avec $f(I) \subset J$. f continue en a et g continue en $f(a) \Rightarrow g \circ f$ continue en a.*

Proposition 3.8 *Soient $a \in I$, $f : I \to \mathbb{C}$.*
f continue en a ssi $\Re f$ et $\Im f$ continues en a.

Rq : résultats analogues pour la continuité globale.

3.3 Continuité sur un intervalle

3.3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.9 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, $(a, b) \in I^2$, $a \leq b$ avec $f(a) \leq f(b)$. Alors, $\forall \gamma \in [f(a), f(b)]$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

Applications : 1. dichotomie

```
def f(x):
    return (x-2)**2-1
def dichotomie(f,a,b,epsilon):
    if (f(a)*f(b)>0):
        print("Il n''y a pas de solution dans l''intervalle")
        return
    while (abs(b-a)>epsilon):
        c=(a+b)/2
```

```
        if (f(a)*f(c)<=0):
            b=c
        else:
            a=c
    return (b+a)/2
print(dichotomie(f,0,1.5,1e-3))
```

2. Une fonction continue ne s'annulant pas garde un signe constant.
3. Un polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

3.3.2 Image d'un intervalle par une fonction continue

Proposition 3.10 *L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Théorème 3.11 (des bornes atteintes) *Soit $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ où $a < b$. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, cad $\exists x_1, x_2 \in [a,b]$, $\forall x \in [a,b]$, $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$.*

Cela n'est vrai que pour un segment.

3.4 Continuité et monotonie

Théorème 3.12 (de la bijection) *Soit f une fonction continue, strictement monotone sur I. Alors,*

(i) *$f(I)$ est un intervalle dont les bornes sont les valeurs ou les limites de f aux bornes de I.*

(ii) *f est une bijection de I sur $f(I)$.*

(iii) *$f^{-1} \in \mathcal{C}(f(I), I)$ et est strictement monotone, de même sens de variation que f. Leurs courbes représentatives se déduisent l'une de l'autre par symétrie par rapport à $y = x$.*

4 Comparaison locale des fonctions

4.1 Fonction dominée par une autre

Définition 4.1 *Soit $a \in \overline{I} \cup \{-\infty, +\infty\}$; g est dominée par f au voisinage de a ssi*

$$\exists V \in \mathcal{V}(a),\, \forall x \in I \cap V, g(x) = h(x)f(x) \text{ et } \exists M \in \mathbb{R},\, \forall x \in I \cap V,\, |h(x)| \leq M.$$

On écrit $g = O_a(f)$.

Rq : en pratique, $g = O_a(f)$ ssi $\dfrac{g}{f}$ est bornée au voisinage de a.

4.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 4.2 *g est négligeable devant f au voisinage de a ssi*

$$\exists V \in \mathcal{V}(a),\, \forall x \in I \cap V,\, g(x) = h(x)f(x) \text{ et } \lim_{x \to a} h(x) = 0.$$

On écrit $g = o_a(f)$.

4.3 Fonctions équivalentes

4.3.1 Généralités

Définition 4.3 *g est équivalente à f au voisinage de a ssi $f - g = o_a(g)$. On écrit $g \underset{a}{\sim} f$.*

Théorème 4.4 $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow \forall x \in I,\, g(x) = h(x)f(x)$ *et* $\lim_{x \to a} h(x) = 1$.

Compatibilité de $\sim$ avec la multiplication, mais pas avec l'addition : **on ne peut sommer deux équivalents que si la somme des parties principales n'est pas nulle.**

Pour ne pas se tromper : ne faire figurer que la partie principale dans l'équivalent. Si plusieurs termes sont nécessaires, écrire une égalité avec un *o*

4.3.2 Exemples fondamentaux d'équivalents en 0

$\sin x \underset{0}{\sim} x$

$1 - \cos x \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

$\tan x \underset{0}{\sim} x$

$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$

$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

$(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$ (avec $\alpha \neq 0$)

$\dfrac{1}{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} -x.$

Q : écrire ces équivalents avec des o.

4.3.3 Composition des équivalents par exp et ln

Proposition 4.5 $\lim_{x \to a}(f-g)(x) = 0 \Leftrightarrow e^f \underset{a}{\sim} e^g$.

Attention à la composition par la fonction exponentielle.
Cex : $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais e^{x+1} et e^x ne sont pas équivalents en $+\infty$.

Proposition 4.6 *Si* $f \underset{a}{\sim} g$ *et si* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+ \backslash \{1\}$, *alors* $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$.

Attention aux équivalents de ln en 1.
Cex : $1 + x \underset{0}{\sim} 1 + 2x$, mais $\ln(1+x)$ et $\ln(1+2x)$ ne sont pas équivalents en 0.

TD 14 - Limites et continuité des fonctions d'une variable réelle

Exercice 1 Soit f définie sur l'intervalle $I = [1, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor^x}$.

1. (a) Montrer que f est continue à droite en tout point de I.
   (b) Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Calculer la limite à gauche de f en p. f est-elle continue à gauche en tout point a de I, cad a-t-on $\lim\limits_{t \overset{<}{\to} a} f(t) = f(a)$?
2. Calculer la limite des suites $(f(u_n))$ dans les cas suivants : $u_n = n$, $u_n = n + 1/2$, $u_n = n + 1/\ln n$.
3. La fonction f admet-elle une limite (finie ou infinie) en $+\infty$?
4. Démontrer que pour tout $a \in [0, 1]$, il existe une suite (u_n) tendant vers $+\infty$ telle que la suite $(f(u_n))$ converge vers a.

Exercice 2 Étudier la continuité de la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = a \\ f(x) = x \times \left\lfloor \left(\dfrac{1}{x}\right) \right\rfloor & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Exercice 3 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 4 Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$ et telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

1. On suppose dans cette question que $f(0) = f(1) = 0$.
   (a) Montrer que f est nulle sur $[0, 1]$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = 0$. En déduire que f est nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est affine, c'est-à-dire qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$.

Exercice 5 Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$. On note $J_f = \{x \in [0, 1],\ f(x) = x\}$.

1. On suppose que f est continue sur $[0, 1]$. Montrer que $J_f \neq \emptyset$. Montrer que ce résultat ne subsiste pas si f n'est pas continue.
2. On suppose de plus que $f \circ f = f$. Montrer que J_f est un intervalle.

Exercice 6 1. Soit $f \in \mathcal{C}([0, 1], [0, 1])$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\exists x \in [0, 1],\ f(x) = x^n$.

2. On suppose désormais que f est strictement décroissante sur $[0,1]$. Montrer que le réel x est unique. On le notera x_n dans la suite de l'exercice.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
4. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donner sa limite.

Exercice 7 Un marcheur parcourt 6 kms en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il parcourt exactement 3 kms.

Exercice 8 Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$, avec $f(a) \neq f(b)$ et u, v des réels strictement positifs. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $uf(a)+vf(b)=(u+v)f(c)$.

Exercice 9 Soit f une application continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que $\dfrac{f(x)}{x}$ a une limite $l<1$ en $+\infty$. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 10 Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $x_0\in\mathbb{R}$ tel que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)\geq f(x_0)$.

Exercice 11 Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une limite finie en $+\infty$. Démontrer que f est bornée et qu'elle atteint au moins l'une de ses bornes :

1. Par une démonstration directe.
2. En posant $F=f\circ\varphi$, où $\varphi:[0,1[\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto \dfrac{x}{1-x}$, et en prolongeant F par continuité en 1.

Exercice 12 Déterminer les limites suivantes, si elles existent : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x\right)$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{x-\dfrac{\pi}{4}}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{1+2\cos 2x}$, $\lim\limits_{x\to0}x^x$, $\lim\limits_{x\to0}|\ln x|^x$, $\lim\limits_{x\to0}(\sin x)^{1/\ln x}$.

Exercice 13 Trouver un équivalent simple de f au voisinage de 0 :
$f(x)=\cos(\sin x)$, $f(x)=\ln(\cos x)$, $f(x)=\ln(\sin x)$, $f(x)=\cos(ax)-\cos(bx)$, $f(x)=a^x-b^x$ $(a>0,\ b>0)$, $f(x)=\tan\dfrac{\pi}{2x+1}$, $f(x)=\sqrt[4]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-x^2}$, $f(x)=\sqrt[4]{16+x}-\sqrt[3]{8+x}$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+3x}}-\dfrac{1}{\sqrt{2-3x}}$.

Exercice 14 Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ dans les cas suivants :

1. $f(x)=\sqrt{x}+x\ln x+\sqrt[3]{x}\ln^2 x$.
2. $f(x)=x^2+x^{5/2}\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}+\sin(\ln x)$.

Exercice 15 Déterminer un équivalent de f dans les cas suivants :

1. $f(x)=x+x^2\ln x+x\ln^2 x$ lorsque $x\overset{>}{\to}0$.
2. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}+\dfrac{\ln^4 x}{x^3}+\dfrac{1}{\ln x}+xe^{-x}$ lorsque $x\to+\infty$.

Exercice 16 Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents : $\lim_{x\to\pi/2} \tan x \tan 2x$, $\lim_{x\to 1/2}(2x^2-3x+1)\tan \pi x$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$, $\lim_{x\to\pi/2} \dfrac{\ln(\sin^2 x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$, $\lim_{x\to 0} \ln x \ln(1+\ln(1+x))$, $\lim_{x\to 0}(1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}(e^{\cos x-1}-1)$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\ln x}{x^x-1}$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1}\ln\left(1-\dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$, $\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$.