

Devoir libre N °1**1 Exercice : Trigonométrie**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $4 \sin(x) \cos(x) = 1$.

2 Problème - Fonction de Lambert

Le but du problème est de définir la fonction de Lambert et d'étudier certaines de ses propriétés. On considère dans tout ce problème, l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto xe^x \end{cases}$$

1. Donner les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f .
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0 et -1 .
4. Tracer soigneusement la courbe C_f représentative de la fonction f , ainsi que ses deux tangentes en 0 et -1 .
5. Justifier que l'application $g : \begin{cases}]-1; +\infty[\longrightarrow]-e^{-1}; +\infty[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.

Dans la suite du sujet, la bijection réciproque de g est notée W .

6. Justifier que W est dérivable sur $] -e^{-1}; +\infty[$.
7. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
8. Donner l'équation de la tangente à la courbe de W au point d'abscisse 0.
9. Tracer, sur le même graphique que C_f , la courbe C_W représentant W et sa tangente en 0.
10. Prouver que

$$\forall x \in] -e^{-1}; +\infty[\setminus \{0\}, \quad W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$$

11. Démontrer que l'application $h : \begin{cases}] -\infty; -1] \longrightarrow] -e^{-1}; 0[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.