

Devoir libre N °1**1 Exercice : Trigonométrie**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $4 \sin(x) \cos(x) = 1$.

2 Problème - Fonction de Lambert

Le but du problème est de définir la fonction de Lambert et d'étudier certaines de ses propriétés. On considère dans tout ce problème, l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto xe^x \end{cases}$$

1. Donner les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f .
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Donner les équations des tangentes à la courbe représentative de f aux points d'abscisse 0 et -1 .
4. Tracer soigneusement la courbe C_f représentative de la fonction f , ainsi que ses deux tangentes en 0 et -1 .
5. Justifier que l'application $g : \begin{cases}]-1; +\infty[\longrightarrow]-e^{-1}; +\infty[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.

Dans la suite du sujet, la bijection réciproque de g est notée W .

6. Justifier que W est dérivable sur $] -e^{-1}; +\infty[$.
7. Expliciter $W(0)$ et $W'(0)$.
8. Donner l'équation de la tangente à la courbe de W au point d'abscisse 0.
9. Tracer, sur le même graphique que C_f , la courbe C_W représentant W et sa tangente en 0.
10. Prouver que

$$\forall x \in] -e^{-1}; +\infty[\setminus \{0\}, \quad W'(x) = \frac{W(x)}{x(1 + W(x))}$$

11. Démontrer que l'application $h : \begin{cases}] -\infty; -1] \longrightarrow] -e^{-1}; 0[\\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est une bijection.

Corrigé

Exercice :

Soit x un réel.

$$\begin{aligned} 4\sin(x)\cos(x) &= 1 \Leftrightarrow 2\sin(2x) = 1 \\ &\Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow 2x \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \text{ ou } 2x \equiv \pi - \frac{\pi}{6}[2\pi] \\ &\Leftrightarrow x \equiv \frac{\pi}{12}[\pi] \text{ ou } x \equiv \frac{5\pi}{12}[\pi]. \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Problème :

1. Remarquons que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par produit de limites infinies et par croissances comparées, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 1e^x + xe^x = (x+1)e^x$$

Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, on peut en conclure que $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$ si $x > -1$ et $f'(x) < 0$ si $x < -1$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[-1; +\infty[$ et f est strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$. Ce qui

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$-e^{-1}$	$+\infty$

se résume dans le tableau de variations suivant :

3. L'équation de la tangente en 0 est $y = f'(0)x + f(0) = x$. L'équation de la tangente de f en -1 est $y = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -e^{-1}$.
4. Voir en bas.
5. La fonction g est strictement croissante et continue sur $] -1; +\infty[$ et f est continue en -1 . Ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, g réalise une bijection de $] -1; +\infty[$ vers l'intervalle

$$g(]-1; +\infty[) = \left] f(-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[=] -e^{-1}; +\infty[$$

6. La fonction g est dérivable sur l'intervalle $] -1; +\infty[$ et pour tout $x > -1$, $g'(x) > 0$. Ainsi, d'après le théorème de la dérivabilité de la bijection réciproque, W est dérivable sur $] -e^{-1}; +\infty[= g(]-1; +\infty[)$.
7. Comme $g(0) = 0$, on en déduit que $0 = W(0)$. D'après la formule du cours

$$W'(0) = \frac{1}{g'(W(0))} = \frac{1}{g'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

8. L'équation de la tangente à la courbe de W au point d'abscisse 0 est $y = W'(0)x + W(0) = x$.
9. Voir en bas.

10. D'après le théorème de la dérivation de la bijection réciproque, pour tout $x \in] -e^{-1}; +\infty[\setminus \{0\}$,

$$W'(x) = \frac{1}{g'(W(x))} = \frac{1}{(W(x)+1)e^{W(x)}}.$$

Soit $x \in] -e^{-1}; +\infty[\setminus \{0\}$. On sait que $g(W(x)) = x$, soit $W(x)e^{W(x)} = x$. Comme $x \neq 0$, on peut en déduire que $W(x) \neq 0$ et donc que $e^{W(x)} = \frac{x}{W(x)}$.

$$\text{soit : } W'(x) = \frac{1}{(W(x)+1)\frac{x}{W(x)}} = \frac{W(x)}{x(1+W(x))}$$

11. De même qu'à la question 4, l'application h est strictement décroissante sur $] -\infty; -1]$ et continue sur cet intervalle. Ainsi, d'après le théorème de la bijection strictement monotone, h réalise donc une bijection de l'intervalle $] -\infty; -1]$ vers l'intervalle

$$h(]-\infty; -1]) = \left[h(-1); \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \right[= [-e^{-1}; 0[$$

