

TD "Train épicycloïdal"

1/3

Corrigé

Par la relation de Willis

1.1 satellite: Roue dentée 3

Porte satellite: Pièce 2 (sortie)

Planétaires: Roue dentée 1 (Entrée)

; Couronne 4 (fixe / au bâti 0)

1.2 Raison du train:

$$\lambda = \frac{\omega_{1/2}}{\omega_{4/2}} = (-1)^1 \frac{z_4 z_3}{z_3 z_1} = - \frac{z_4}{z_1}$$

1.3 Relation de Willis:

$$\frac{\omega_{1/0} - \omega_{2/0}}{\omega_{4/0} - \omega_{2/0}} = - \frac{z_4}{z_1} \quad \text{Avec: } \begin{cases} \omega_{1/0} = \omega_{\text{Entrée}/0} \\ \omega_{4/0} = 0 \\ \omega_{2/0} = \omega_{\text{sortie}/0} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{\omega_{\text{Entrée}/0} - \omega_{\text{sortie}/0}}{0 - \omega_{\text{sortie}/0}} = - \frac{z_4}{z_1}$$

$$\text{Soit } z_1 \omega_{\text{Entrée}/0} - z_1 \omega_{\text{sortie}/0} = z_4 \omega_{\text{sortie}/0}$$

D'où le rapport de transmission du train

$$K = \frac{\omega_{\text{sortie}/0}}{\omega_{\text{Entrée}/0}} = \frac{z_1}{z_1 + z_4}$$

Par la cinématique :

213

(2.1) Attention les points A et C sont des points géométriques : $A \notin 1$ $A \notin 3$ $B \notin 3$ $B \notin 4$

Donc $\vec{V}_{A \in 110} \neq \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_0}$ $\vec{V}_{A \in 310} \neq \left(\frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_0}$ et $\vec{V}_{C \in 310} \neq \left(\frac{d\vec{OC}}{dt} \right)_{R_0}$

$$\vec{V}_{A \in 110} = \vec{V}_{O \in 110} + \vec{AO} \wedge \vec{\Omega}_{110}$$

avec $\vec{V}_{O \in 110} = \vec{0}$ car O est sur l'axe de la poutre 110

$$\text{Donc } \vec{V}_{A \in 110} = -R_1 \vec{y}_2 \wedge \omega_{110} \vec{x}_2 \Rightarrow \boxed{\vec{V}_{A \in 110} = R_1 \omega_{110} \vec{z}_2}$$

$$\vec{V}_{A \in 310} = \vec{V}_{B \in 310} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{310}$$

avec $\vec{V}_{B \in 312} = \vec{0}$ car B est sur l'axe de la poutre 312

$$\text{donc } \vec{V}_{B \in 310} = \vec{V}_{B \in 312} + \vec{V}_{B \in 210} = \vec{V}_{B \in 210}$$

$$\text{or } \vec{V}_{B \in 210} = \vec{V}_{O \in 210} + \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{210}$$

avec $\vec{V}_{O \in 210} = \vec{0}$ car O est sur l'axe de la poutre 210

$$\text{Donc } \vec{V}_{A \in 310} = \vec{BO} \wedge \vec{\Omega}_{210} + \vec{AB} \wedge \vec{\Omega}_{310}$$

$$\text{avec } \vec{\Omega}_{310} = \vec{\Omega}_{312} + \vec{\Omega}_{210} = (\omega_{312} + \omega_{210}) \vec{e}_2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \vec{V}_{A \in 310} &= -(R_1 + R_3) \vec{y}_2 \wedge \omega_{210} \vec{e}_2 + R_3 \vec{y}_2 \wedge (\omega_{312} + \omega_{210}) \vec{e}_2 \\ &= [(R_1 + R_3) \omega_{210} - R_3 \omega_{312} - R_3 \omega_{210}] \vec{z}_2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{V}_{A \in 310} = [R_1 \omega_{210} - R_3 \omega_{312}] \vec{z}_2}$$

$$\vec{V_{CE310}} = \vec{V_{BE310}} + \vec{CB} \wedge \vec{\Omega_{310}}$$

or on a vu que $\vec{V_{BE310}} = \vec{BO} \wedge \vec{\Omega_{210}}$

Donc $\vec{V_{CE310}} = \vec{BO} \wedge \vec{\Omega_{210}} + \vec{CB} \wedge \vec{\Omega_{310}}$

$$\vec{V_{CE310}} = -(R_1 + R_3) \vec{y}_2 \wedge \omega_{210} \vec{z}_2 - R_3 \vec{y}_2 \wedge (\omega_{312} + \omega_{210}) \vec{z}_2$$

$$\vec{V_{CE310}} = [(R_1 + R_3) \omega_{210} + R_3 \omega_{312} + R_3 \omega_{210}] \vec{z}_2$$

$$\vec{V_{CE310}} = [(R_1 + 2R_3) \omega_{210} + R_3 \omega_{312}] \vec{z}_2$$

D'autre part on a $R_1 + 2R_3 = R_4$

Donc $\vec{V_{CE310}} = [R_4 \omega_{210} + R_3 \omega_{312}] \vec{z}_2$

(2.2) Roulement sans glissement en A $\Rightarrow \vec{V_{AE310}} = \vec{0}$

or $\vec{V_{AE310}} = \vec{V_{AE310}} + \vec{V_{AE010}} = \vec{V_{AE310}} - \vec{V_{AE110}} = \vec{0}$

soit $\vec{V_{AE310}} = \vec{V_{AE110}} \Rightarrow R_1 \omega_{110} \vec{z}_2 = [R_1 \omega_{210} - R_3 \omega_{312}] \vec{z}_2$

Donc $R_3 \omega_{312} = R_1 \omega_{210} - R_1 \omega_{110}$ (a)

Roulement sans glissement en C $\Rightarrow \vec{V_{CE310}} = \vec{0}$

or $\vec{V_{CE310}} = \vec{V_{CE310}} + \vec{V_{CE010}}$ avec $\vec{V_{CE010}} = \vec{0}$ car la couronne h est fixe par rapport au bâti 0

Donc $\vec{V_{CE310}} = \vec{0} \Rightarrow \underline{R_4 \omega_{210} + R_3 \omega_{312} = 0}$ (b)

Des équations (a) et (b) $\Rightarrow R_4 \omega_{210} + R_1 \omega_{210} - R_1 \omega_{110} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\omega_{210}}{\omega_{110}} = \frac{\omega_{sortie10}}{\omega_{Entree10}} = K = \frac{R_1}{R_1 + R_4} = \frac{z_1}{z_1 + z_4} \quad \left| \begin{array}{l} \text{car } \forall i \\ R_i = \frac{m z_i}{2} \end{array} \right.$$

Poulie REDEX : Corrigé

1- Raison du train d'engrenage

Les roues dentées sont 6, 10, 24 et 31.

☞ Les roues dentées 6 et 10 sont encastrées sur 9 qui est en liaison pivot sur 5. On en déduit que :

☞ 5 est le porte satellite

☞ La roue dentée 24 est encastrée sur le bâti 18.

☞ 6 et 10 sont les satellites

☞ La roue dentée 31 est encastrée sur 32 qui est en liaison pivot sur le bâti 18.

☞ 24 et 31 sont les planétaires

☞ 5 est en liaison pivot sur le bâti 18

On en déduit la raison λ du train épicycloïdal

1^{ière} possibilité $\lambda = \frac{\omega_{31/5}}{\omega_{24/5}} = \frac{Z_{24} \cdot Z_6}{Z_{10} \cdot Z_{31}}$	2^{ème} possibilité $\lambda = \frac{\omega_{24/5}}{\omega_{31/5}} = \frac{Z_{10} \cdot Z_{31}}{Z_{24} \cdot Z_6}$
---	--

2- Relation de Willis

On obtient la relation de Willis par composition des vitesses : $\lambda = \frac{\omega_{P1/PS}}{\omega_{P2/PS}} = \frac{\omega_{P1} - \omega_{PS}}{\omega_{P2} - \omega_{PS}}$

1^{ière} possibilité $\lambda = \frac{\omega_{31} - \omega_5}{\omega_{24} - \omega_5}$	2^{ème} possibilité $\lambda = \frac{\omega_{24} - \omega_5}{\omega_{31} - \omega_5}$
--	---

3- Relation de Willis avec les entrées sortie

L'entrée se fait sur la poulie 5. Donc: $\omega_E = \omega_5$

La sortie se fait sur l'arbre 32 sur lequel est encastré la roue 31. Donc : $\omega_S = \omega_{31}$

On obtient la relation de Willis par composition des vitesses : $\lambda = \frac{\omega_{P1/PS}}{\omega_{P2/PS}} = \frac{\omega_{P1} - \omega_{PS}}{\omega_{P2} - \omega_{PS}}$

1^{ière} possibilité $\lambda = \frac{\omega_S - \omega_E}{\omega_{24} - \omega_E}$	2^{ème} possibilité $\lambda = \frac{\omega_{24} - \omega_E}{\omega_S - \omega_E}$
---	--

4- Rapport de transmission

D'autre part la roue 24 est encastrée sur le bâti 18. Donc : $\omega_{24} = 0$. On en déduit la relation de Willis après application des conditions de fonctionnement.

1^{ière} possibilité $\lambda = \frac{\omega_S - \omega_E}{-\omega_E}$	2^{ème} possibilité $\lambda = \frac{-\omega_E}{\omega_S - \omega_E}$
$\Leftrightarrow \omega_S = (1 - \lambda) \cdot \omega_E$ Donc: $k = \frac{\omega_S}{\omega_E} = 1 - \lambda$	$\Leftrightarrow \lambda \cdot \omega_S = (\lambda - 1) \cdot \omega_E$ Donc: $k = \frac{\lambda}{\lambda - 1} = 1 - \frac{1}{\lambda}$

5- Applications numériques

$$k = 1 - \frac{Z_{24} \cdot Z_6}{Z_{10} \cdot Z_{31}} = 1 - \frac{49 \times 34}{31 \times 46} = -0,168$$

6- Raison pour inverser le sens avec le même rapport de transmission

On souhaite avoir : $k_{th} = +0,168$ avec : $k_{th} = 1 - \lambda_{th}$ Donc : $\lambda_{th} = 1 - 0,168 = 0,832$

7- Nombres dents pour inverser le sens de rotation

On a : $\lambda_{th} = \frac{Z_{24} \cdot Z_6'}{Z_{10} \cdot Z_{31}'} \Rightarrow \frac{Z_6'}{Z_{31}'} = \lambda_{th} \cdot \frac{Z_{10}}{Z_{24}} = 0,832 \cdot \frac{31}{49} = 0,526$ D'autre part : $Z_6' + Z_{31}' = 81$

On en déduit : $\frac{81 - Z_{31}'}{Z_{31}'} = 0,526 \Rightarrow Z_{31}' = \frac{81}{1 + 0,526} = 53,1$ On choisit cependant un entier :

$$Z_{31}' = 53 \text{ dents} \Rightarrow Z_6' = 81 - 53 = 28 \text{ dents} \Rightarrow \lambda' = 0,835 \quad k' = +0,165$$