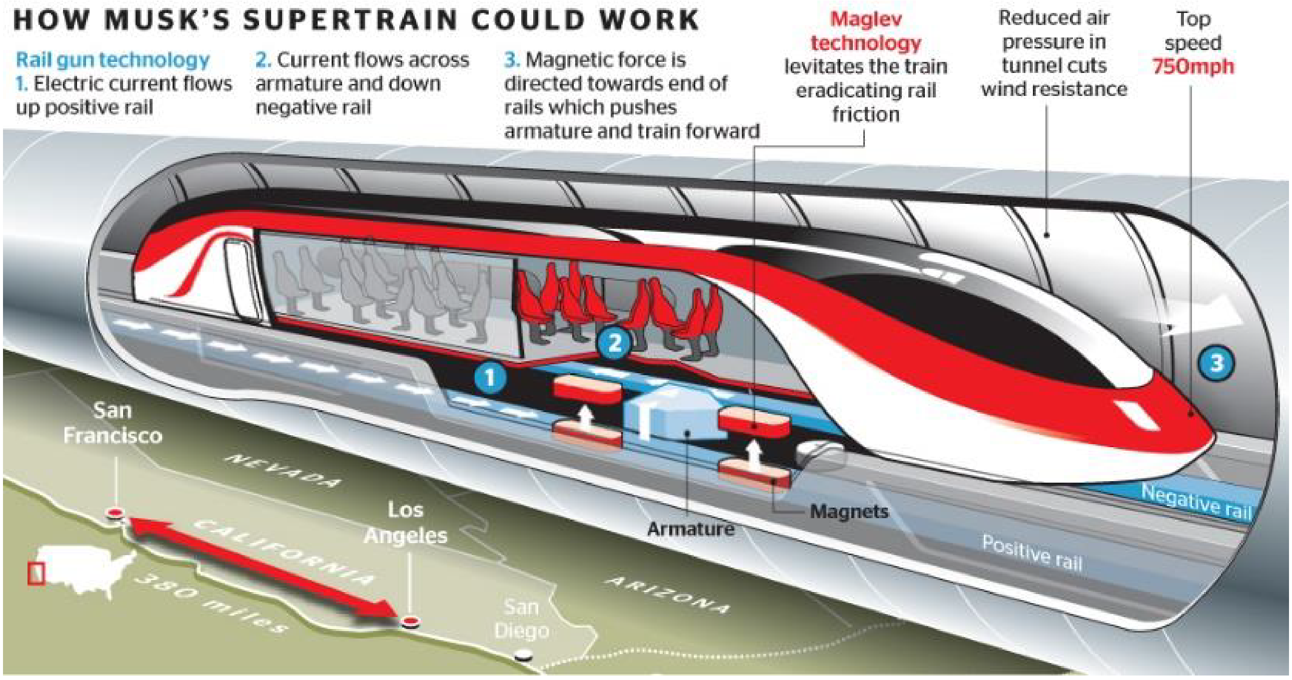
Corrigé DS 2 : Analyser, modéliser et expérimenter le comportement des systèmes linéaires continus invariants (SLCI)

: Train électromagnétique « Hyperloop »



1 Présentation

Un train électromagnétique prototype utilise le champ créé par une bobine pour se propulser (on parle de moteur à induction linéaire). On étudie sa vitesse de translation sur $\overrightarrow{x}$ notée $v(t)$, il pèse une masse m. Le champ magnétique génère sur le train une force proportionnelle au courant i qui la traverse : $\overrightarrow{F_{mag}} = Bi(t)\overrightarrow{x}$. Une force de frottement train $F_v = -f_a v(t)^2\overrightarrow{x}$ s'oppose à son avancement. Le champ de gravité est noté $-g\overrightarrow{y}$ et le système de sustentation génère une force verticale $F_S\overrightarrow{y}$ pour maintenir une distance stable par rapport au sol. Le repère est présenté sur la figure 2.

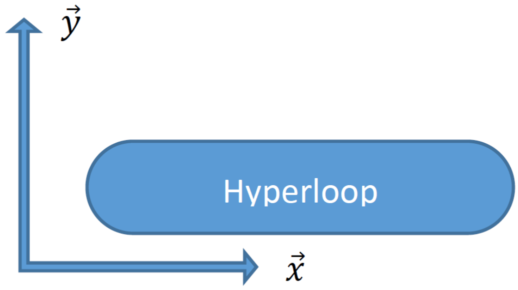


FIGURE 1 – Repère

1.1 Attentes du client

On présente ici un extrait du cahier des charges :

Exigence	Critère	Niveau	Flexibilité
Le système doit atteindre sa vitesse de croisière rapidement.	$t_{5\%}$	30 s	Maximum
Le système doit se déplacer à vive allure.	vitesse en régime permanent	500 km/h	Minimum

2 Modélisation du train magnétique comme un SLCI

Question 1 Isoler le train, effectuer le bilan de forces, appliquer le principe fondamental de la dynamique et par une projection adaptée donner l'équation du mouvement permettant d'obtenir $v(t)$.

Principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe $\vec{x}$: $Bi(t) - f_a v(t)^2 = m\dfrac{dv}{dt}(t)$

L'équation est non linéaire ; pour la suite on remplace la force de frottement proportionnelle au carré de la vitesse par une force proportionnelle à la vitesse : $-fv(t)\vec{x}$.

Pour la suite, on utilisera l'équation :

$$Bi(t) - fv(t) = m\frac{dv}{dt}(t) \tag{1}$$

Question 2 On étudie la mise en mouvement, la vitesse initiale est ainsi nulle. Passer l'équation 1 dans le domaine de Laplace et donner la fonction de transfert $H_t(p) = \frac{V(p)}{I(p)}$.

$Bi(t) = m\dfrac{dv}{dt}(t) + fv(t)$

On applique la transformée de Laplace :

$BI(p) = mpV(p) + fV(p)$

D'où

$$\frac{V(p)}{I(p)} = \frac{B}{f + mp}$$

Question 3 On utilisera la forme $H_t(p) = \frac{K}{1+\tau p}$. Identifier K et τ en fonction des données du problème.

$$K = \frac{B}{f}$$

$$\tau = \frac{m}{m}$$

3 Validation du cahier des charges

Question 4 On teste la réponse du train à un échelon de courant d'amplitude A. Exprimer cette entrée en temporel, i(t), puis en Laplace, I(p).

$$i(t) = Au(t)$$

Avec :

$$\begin{aligned} u(t) &= 0 \quad si \quad t < 0 \\ u(t) &= 1 \quad si \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

La transformée de Laplace d'un échelon d'amplitude A est :

$$F(p) = \frac{A}{p}$$

Question 5 Sans passer dans le domaine temporel exprimer la valeur de la vitesse en régime permanent. On donne $B = 5\text{T}$, $f = 6000\text{Nms}^{-1}$ et $A = 170\text{kA}$. On utilise le théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot F(p)$$

Application du théorème :

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{p \to 0} p \cdot V(p) = \lim_{p \to 0} p \cdot H(p)\frac{A}{p} = \lim_{p \to 0} p \cdot \frac{K}{1+\tau p}\frac{A}{p} = KA$$

Application numérique :

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = KA = \frac{B}{f}A = \frac{5}{6000}170000 = 141,67ms^{-1} = 510km/h$$

Question 6 Calculer l'expression temporelle de la vitesse $v(t)$ pour cette entrée échelon. D'après le cours, pour notre système du premier ordre, on a :

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

Et la transformée de Laplace inverse donne :

$$v(t) = KA\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

Question 7 Tracer l'allure de la réponse temporelle.

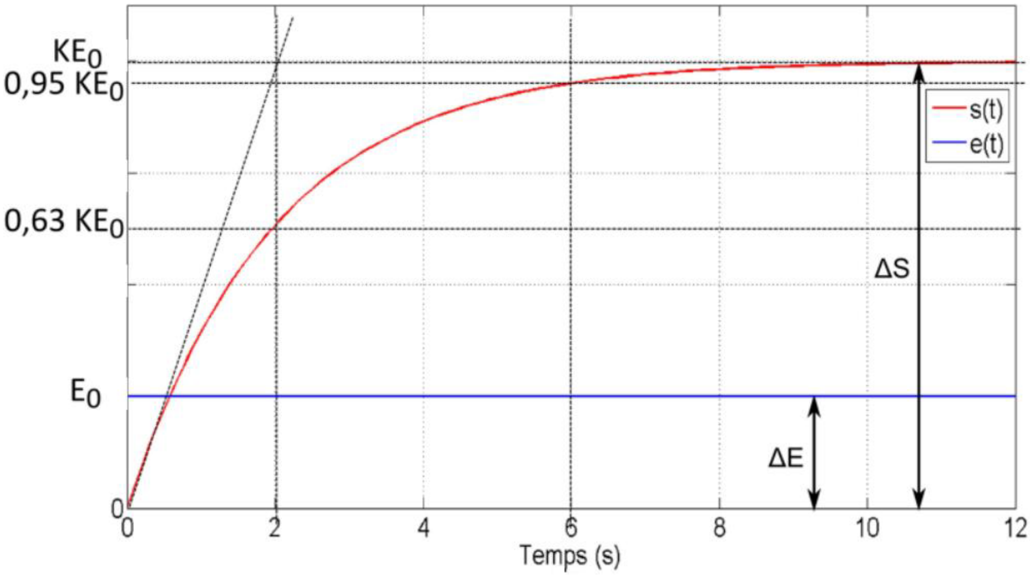


FIGURE 2 – Réponse d'un système du premier ordre.

Question 8 On donne la masse du véhicule : $m = 40000$kg. Les critères du cahier des charges sont-ils validés ? D'après le cours, La valeur du temps pour laquelle la sortie s(t) atteint 95 % de la valeur finale, $t_{5\%}$, correspond à 3τ.

$$t_{5\%} = 3\tau = 3\frac{m}{f} = 3\frac{40000}{6000} = 20s$$

Critère vérifié.

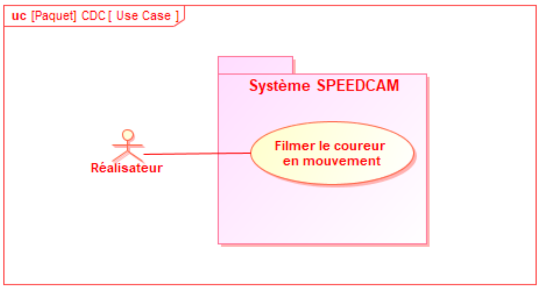
Pour le critère sur la vitesse en régime permanent, c'est également vérifié car 510 km/h est supérieur à 500 km/h.

Exercice 5 - Caméra Speedcam

Question 1 Exprimer la vitesse maximale $15\,\mathrm{m.s}^{-1}$ en km/h

$15\dfrac{m}{s} = 15\dfrac{1000m}{3600s}\cdot\dfrac{3600}{1000} = 54km/h$ donc $\boxed{15m.s^{-1} = 54km/h}$

Question 2 Proposer un diagramme de cas d'utilisation du système *Speedcam*.



Question 3 À partir de la description du système et du diagramme de définition de blocs, compléter les chaînes d'énergie et d'informations du système de caméra de poursuite *Speedcam* sur la figure 1 page 1.

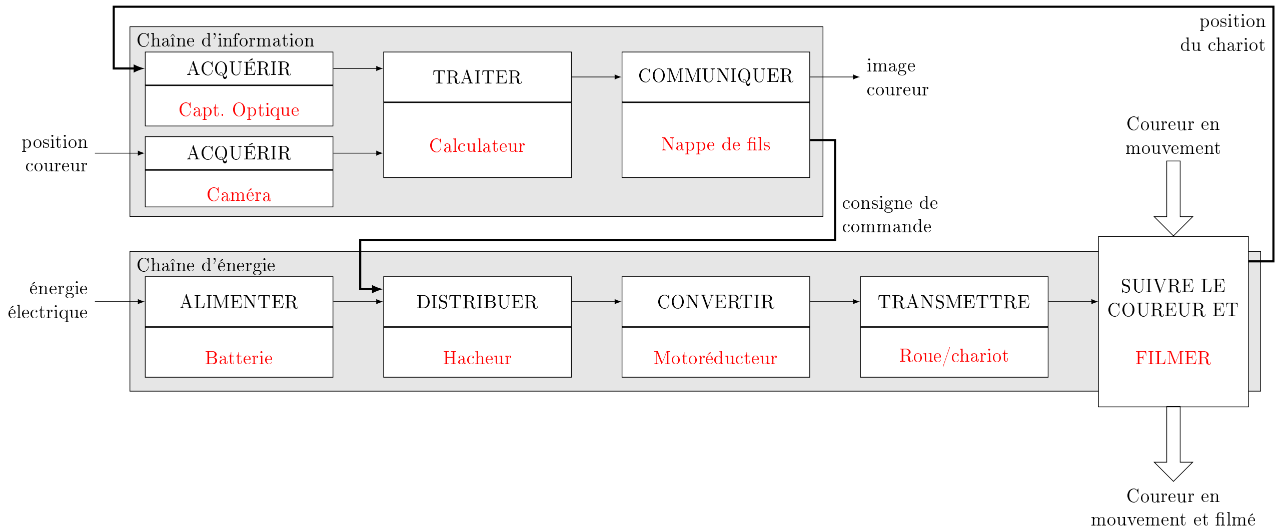
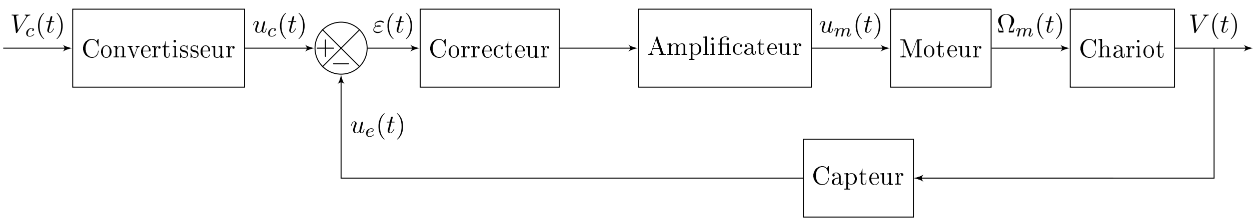


FIGURE 1 – Diagramme des chaînes fonctionnelles du système *Speedcam*

Question 4 Justifier à la lecture de la description du système qu'il s'agit bien d'un asservissement. Mettre en place la structure de cet asservissement (tous les éléments nécessaire sont dans la courte description ci-dessus).

La description comprend une boucle de retour avec capteur. Les grandeurs d'entrée et de sortie sont identiques (même unité). Le système est donc bien un système asservi.



Question 5 Pour chaque réponse indicielle ci-dessous, caractériser la vérification de la fonction « déplacer la caméra ». (Le critère de stabilité de la caméra est toujours vérifié). Vous ferez apparaitre les tracés permettant la mesure des critères sur les réponses indicielles

Correction proportionnelle :
$\mu_s = 0{,}45\,\mathrm{m.s^{-1}} \Rightarrow$ Pas bon
$tr_{5\%} = 0{,}13\,\mathrm{s} \Rightarrow$ OK

Correction intégrale :
$\mu_s = 0\,\mathrm{m.s^{-1}} \Rightarrow$ OK
$tr_{5\%} = 2{,}2\,\mathrm{s} \Rightarrow$ Pas bon

Correction intégrale modifiée :
$\mu_s = 0\,\mathrm{m.s^{-1}} \Rightarrow$ OK
$tr_{5\%} = 0{,}3\,\mathrm{s} \Rightarrow$ OK

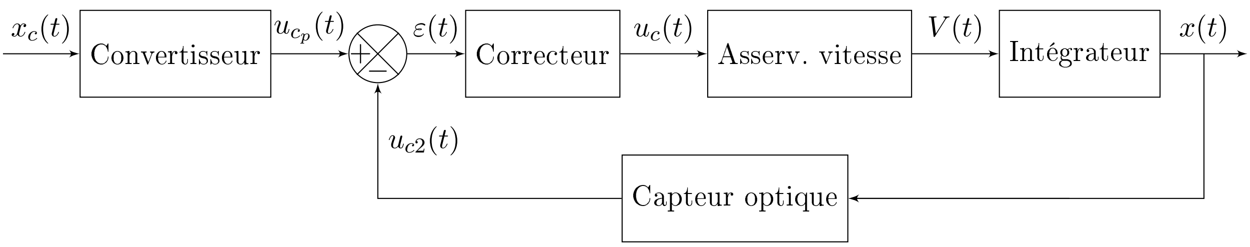
Question 6 Faire un choix de correcteur à implanter sur le système de caméra *Speedcam* afin de respecter le cahier des charges de la fonction « Déplacer la caméra ».

Au vu des résultats précédents, il faut choisir la 3e solution

Question 7 Justifier simplement que l'asservissement de vitesse ne permet pas nécessairement de vérifier la fonction « suivre l'athlète ».

Tel qu'il est conçu, le système pourra évoluer à la bonne vitesse mais ne pas cadrer le coureur. Il faut donc s'assurer constamment de la position de la caméra.

Question 8 Compléter le schéma fonctionnel ci-dessous de l'asservissement de position (on notera $V(t)$ la vitesse, $x_c(t)$ la consigne de position et $x(t)$ la position réelle). L'asservissement de vitesse élaboré à la question 4 est représenté par le bloc **Asser. vitesse**. Quel est le composant qui permet de réaliser la mesure de la position linéaire réelle $x(t)$?



C'est le capteur optique qui réalise la mesure de la position linéaire réelle.

Partie 2 - Calculs de limites

Soit $Y(p) = \dfrac{1+3.p}{p.(2.p+3)}$ la transformée de Laplace de $y(t)$: $y(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} Y(p)$

Question 9 En utilisant le théorème de la valeur finale calculer $y(+\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$

$$y(+\infty) = \lim_{p\to 0^+} p.\mathcal{L}[y(t)] = \lim_{p\to 0^+} p.Y(p) = \lim_{p\to 0^+} \frac{1+3.p}{2.p+3} = \frac{1}{3} \text{ donc } \boxed{y(+\infty) = \frac{1}{3}}$$

Question 10 En utilisant le théorème de la valeur initiale calculer $y(0^+) = \lim\limits_{t\to 0^+} y(t)$

$$y(0^+) = \lim_{p\to+\infty} p.\mathcal{L}[y(t)] = \lim_{p\to+\infty} p.Y(p) = \lim_{p\to+\infty} \frac{1+3.p}{2.p+3} = \frac{3}{2} \text{ donc } \boxed{y(0^+) = \frac{3}{2}}$$

Question 11 En utilisant le théorème de la valeur initiale calculer $y'(0^+) = \lim\limits_{t\to 0^+} y'(t)$

$$y(0^+) = \lim_{p\to+\infty} p.\mathcal{L}[y'(t)]$$

Nous avons besoin de $\mathcal{L}[y'(t)]$: $\mathcal{L}[y'(t)] = p.\mathcal{L}[y(t)] - y(0^+) = \dfrac{1+3.p}{2.p+3} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{-7}{2.(2.p+3)}$

$$y(0^+) = \lim_{p\to+\infty} \frac{-7.p}{2.(2.p+3)} = -\frac{7}{4} \text{ donc } \boxed{y(0^+) = -\frac{7}{4}}$$

Partie 3 - Décomposition en éléments simples

Soit la fraction rationnelle suivante $\dfrac{1}{(p+3).(p^2+p+9)} = \dfrac{A}{p+3} + \dfrac{B.p+C}{p^2+p+9}$

Question 12 Déterminer les valeurs des constantes A, B et C.

On utilise la technique de la racine :

On multiplie par $(p+3)$ puis en prend $p=-3$ on obtient : $A = \dfrac{1}{9-3+9} = \dfrac{1}{15}$

On utilise la technique de la limite :

On multiplie par p : $\dfrac{p}{(p+3).(p^2+p+9)} = \dfrac{p.\frac{1}{15}}{p+3} + \dfrac{B.p^2+C.p}{p^2+p+9}$ puis fait tendre p vers $+\infty$ on obtient : $0 = \dfrac{1}{15} + B$ donc $B = -\dfrac{1}{15}$

Nous n'avons plus d'astuce en stock, nous avons pour l'instant :

$$\frac{1}{(p+3).(p^2+p+9)} = \frac{\frac{1}{15}}{p+3} + \frac{-\frac{1}{15}.p+C}{p^2+p+9}$$

Il faut prendre une valeur pour p et résoudre l'équation obtenue. Par exemple $p=-1$ nous donne :

$$\frac{1}{(-1-3).(1-1+9)} = \frac{\frac{1}{15}}{-1+3} + \frac{-\frac{1}{15}.p+C}{1-1+9} \text{ donc } C = \frac{2}{15}$$

donc finalement : $\boxed{\dfrac{1}{(p+3).(p^2+p+9)} = \dfrac{\frac{1}{15}}{p+3} + \dfrac{-\frac{1}{15}.p+\frac{2}{15}}{p^2+p+9}}$

Partie 4 - Résolution d'une équation différentielle

Soit l'équation différentielle suivante : $\begin{cases} 2.\dfrac{d^2s(t)}{dt^2} + 3.\dfrac{ds(t)}{dt} + s(t) &= he(t) \\ s(0^+) &= 0 \\ s'(0^+) &= 0 \end{cases}$

Question 13 En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'équation différentielle.

On pose $s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} S(p)$, donc $s'(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p.S(p)$ et $s''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2.S(p)$

donc l'équation différentielle devient : $2.p^2.S(p) + 3.p.S(p) + S(p) = \dfrac{1}{p}$ donc $S(p) = \dfrac{1}{p.(2.p^2+3.p+1)}$

On décompose en éléments simples (ne pas oublier de factoriser le dénominateur sur $\mathbb{R}$:

$S(p) = \dfrac{1}{p.(2.p^2+3.p+1)} = \dfrac{1}{2.p.(p+\frac{1}{2}).(p+1)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+\frac{1}{2}} + \dfrac{C}{p+1}$

pour A : on multiplie par p puis on prend $p=0$ donc $A=1$

pour B : on multiplie par $(p+\frac{1}{2})$ puis on prend $p=-\frac{1}{2}$ donc $B=-2$

pour C : on multiplie par $(p+1)$ puis on prend $p=-1$ donc $C=1$

donc $S(p) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{-2}{p+\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{p+1}$

à l'aide du formulaire :

$\dfrac{1}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} he(t)$ $\qquad \dfrac{-2}{p+\frac{1}{2}} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -2.e^{-\frac{1}{2}.t}.he(t)$ $\qquad \dfrac{1}{p+1} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t}.he(t)$

finalement : $\boxed{s(t) = \left\{1 - 2.e^{-\frac{1}{2}.t} + e^{-t}\right\}.he(t)}$

Partie 5 - Transformée inverse de Laplace

Soit $G(p) = \dfrac{\frac{1}{6}}{p} - \dfrac{\frac{1}{3}.p+\frac{1}{6}}{2.p^2+p+6}$ la transformée de Laplace de $g(t)$: $g(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} G(p)$

Question 14 En utilisant le tableau des transformées usuelles de fonctions déterminer $g(t)$.

Déjà : $\dfrac{\frac{1}{6}}{p} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dfrac{1}{6}.he(t)$

Pour $\dfrac{\frac{1}{3}.p+\frac{1}{6}}{2.p^2+p+6}$, il faut utiliser :

$e^{-a.t}.\sin(\omega.t).he(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$ et $e^{-a.t}.\cos(\omega.t).he(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$.

Mettons le dénominateur sous la bonne forme, c'est à dire : $(p+a)^2+\omega^2$

$$2.p^2+p+6 = 2.\left(p^2+\frac{1}{2}.p+3\right) = 2.\left(\left(p+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+3\right) = 2.\left(\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}\right)$$

Donc $\dfrac{\frac{1}{3}.p+\frac{1}{6}}{2.p^2+p+6} = \dfrac{\frac{1}{3}.p+\frac{1}{6}}{2.\left(\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}\right)} = \dfrac{\frac{1}{6}.p+\frac{1}{12}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}} = \dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right\}$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{p}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}} + \frac{p+\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right\} = \frac{1}{6}\left\{\frac{p+\frac{1}{4}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}} + \frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{p+\frac{1}{4}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}} + \frac{\frac{1}{4}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right\} = \frac{1}{6}\left\{\frac{p+\frac{1}{4}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}} + \frac{1}{4}.\frac{\frac{4}{\sqrt{47}}.\frac{\sqrt{47}}{4}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{p+\frac{1}{4}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}} + \frac{1}{\sqrt{47}}.\frac{\frac{\sqrt{47}}{4}}{\left(p+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{47}{16}}\right\}$$

donc $\boxed{g(t) = \dfrac{1}{6}.\left\{1-e^{-\frac{t}{4}}.\left(\cos\left(\dfrac{\sqrt{47}}{4}.t\right)+\dfrac{1}{\sqrt{47}}.\sin\left(\dfrac{\sqrt{47}}{4}.t\right)\right)\right\}.he(t)}$

Question 15 Mettre $g(t)$ sous la forme $g(t) = \gamma.\left\{1-\alpha.e^{-a.t}.\sin(\omega.t+\beta)\right\}.he(t)$, préciser les expressions de a, ω, γ, α et β.

$\sin(\omega.t+\beta) = \sin(\omega.t).\cos\beta+\cos(\omega.t).\sin\beta$

donc $s(t) = \gamma.\left\{1-e^{-a.t}.(\alpha.\sin(\omega.t).\cos\beta+\alpha.\cos(\omega.t).\sin\beta)\right\}.he(t)$

or

$$g(t) = \frac{1}{6}.\left\{1-e^{-\frac{t}{4}}.\left(\cos\left(\frac{\sqrt{47}}{4}.t\right)+\frac{1}{\sqrt{47}}.\sin\left(\frac{\sqrt{47}}{4}.t\right)\right)\right\}.he(t)$$

par identification : $\begin{cases} a &= \frac{1}{4} \\ \omega &= \frac{\sqrt{47}}{4} \\ \alpha.\cos\beta &= \frac{1}{\sqrt{47}} \\ \alpha.\sin\beta &= 1 \end{cases}$

donc $\tan\beta = \sqrt{47}$ on peut prendre $\beta \approx 81,7°$ et $\alpha \approx 1,01$

finalement : $\boxed{a = \dfrac{1}{4}}$, $\boxed{\omega = \dfrac{\sqrt{47}}{4}}$, $\boxed{\beta \approx 81,7°}$ et $\boxed{\alpha \approx 1,01}$