

Systèmes du deuxième ordre

Modèle du deuxième ordre

1. Définition d'un système du deuxième ordre

1.1. Définition

Ces systèmes sont caractérisés par une équation différentielle du 2nd ordre de la forme :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \times e(t)$$

• Fonction de transfert :

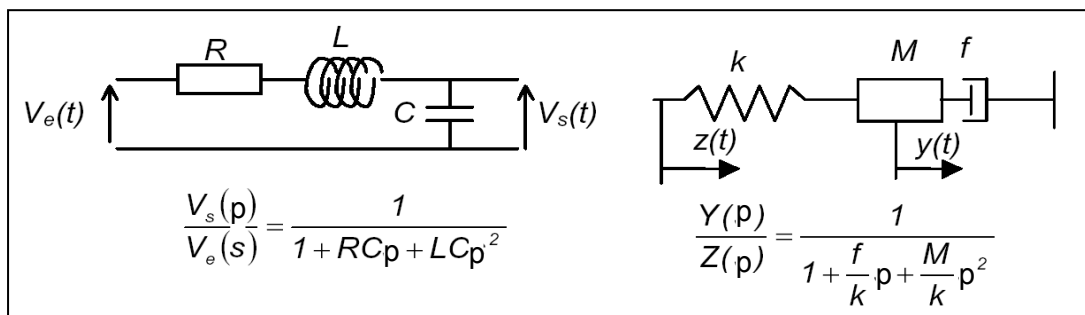
La fonction de transfert correspondante avec la condition de Heaviside s'écrit :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = H(p) = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$$

Avec :

K	gain statique
ξ	facteur d'amortissement
ω_0	pulsation propre

1.2. Exemples de systèmes du deuxième ordre



2. Réponse temporelle d'un système du deuxième ordre

2.1. La réponse indicielle :

Avec $e(t) = E_0 \cdot u(t)$, on a $E(p) = \frac{E_0}{p}$ d'où $S(p) = \frac{E_0 \cdot K}{p(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2)} = \frac{E_0 \cdot K \cdot \omega_0^2}{p(\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 p + p^2)}$

Nous cherchons $s(t)$, il faut décomposer $S(p)$ en élément simples et donc déterminer les pôles de $S(p)$.

Résolution de : $\omega_0^2 + 2\xi \omega_0 p + p^2 = 0$ $\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$

Les solutions dépendent du signe du discriminant Δ de l'équation. Il faut envisager 3 cas :

$0 \leq \xi < 1 \Rightarrow \Delta < 0$	2 racines complexes	$p_{1,2} = -\xi \omega_0 \pm i \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$
$\xi = 1 \Rightarrow \Delta = 0$	1 racine double	$p_{1,2} = -\omega_0$
$\xi > 1 \Rightarrow \Delta > 0$	2 racines réelles	$p_{1,2} = -\xi \omega_0 \pm \omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$

2.1.1. Cas n°1 : $0 < \xi < 1$ Régime pseudopériodique

Pour déterminer les transformées de Laplace inverses il faut effectuer cette décomposition en éléments simples malgré la nature complexe des pôles (cf Annexe Laplace). On écrit donc $S(p)$ sous la forme :

$$S(p) = \frac{E_0 \cdot K \cdot \omega_0^2}{p((p + \xi \omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2))} = \frac{A}{p} + \frac{B \cdot (p + \xi \omega_0)}{(p + \xi \omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} + \frac{C}{(p + \xi \omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)}$$

En multipliant par p , et en prenant $p = 0$, on obtient facilement $A = E_0 \cdot K$

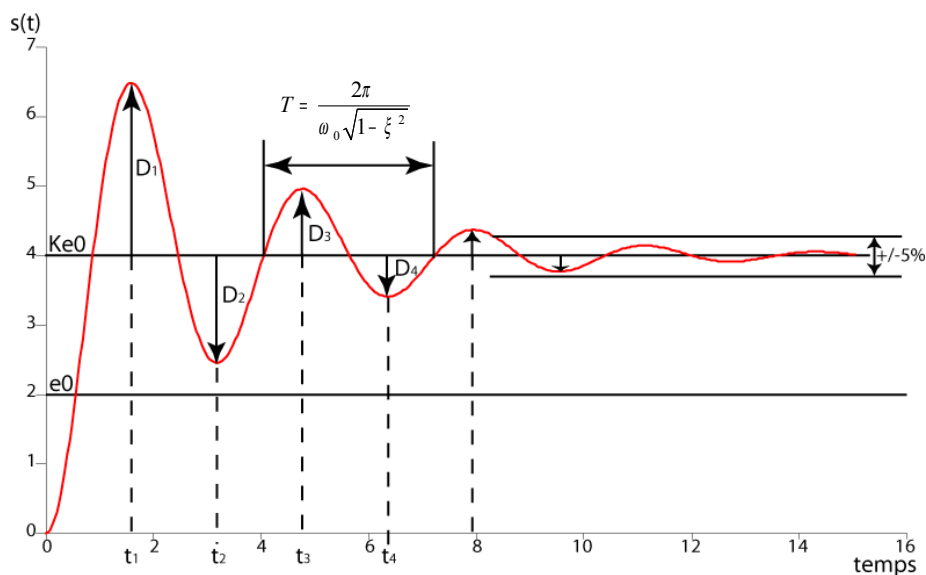
En multipliant par $(p + \xi \omega_0)^2 + (1 - \xi^2) \omega_0^2$, en prenant $p = p_1$

et en isolant partie réelle et partie imaginaire, on obtient $B = -E_0 \cdot K$ et $C = -E_0 \cdot K \cdot \omega_0 \xi$

$$S(p) = \frac{E_0 \cdot K}{p} - \frac{E_0 \cdot K(p + \xi \omega_0)}{(p + \xi \omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)} - \frac{E_0 \cdot K \xi \omega_0}{(p + \xi \omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \xi^2)}$$

d'où :

$$s(t) = E_0 \cdot K \left[1 - \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \left(\sqrt{1 - \xi^2} \cos(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t) + \xi \sin(\sqrt{1 - \xi^2} \omega_0 t) \right) \right]$$



Propriétés remarquables :

- Le comportement du système est oscillant et amorti oscillant autour de la consigne si $K=1$. La pseudo-période des oscillations est caractérisée par la pseudo pulsation $\omega_p = \sqrt{1 - \xi^2} \omega_0$
- La tangente à l'origine est **horizontale**.
- Le dépassement D_1 permet d'identifier le coefficient d'amortissement ξ tandis que le temps de dépassement t_1 permet d'identifier la pulsation non amortie ω_0 .

Temps du $k^{\text{ème}}$ dépassement	$t_k = \frac{k\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$
Amplitude du $k^{\text{ème}}$ dépassement	$D_k = K \cdot e_0 \cdot \exp\left(\frac{-k\pi\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}}\right)$
Pseudo pulsation	$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$
Pseudo période	$T = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}}$

2.1.2. Cas n°2 : $\xi > 1$ Régime apériodique

Le dénominateur $\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2$ se factorise en $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$

$$\text{avec : } p_1 = -\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1} \text{ et } p_2 = -\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2 \text{ et } 0 < p_2 < p_1$$

$$S(p) = \frac{E_0 \cdot K \cdot \omega_0^2}{p(p - p_1)(p - p_2)} = \frac{E_0 \cdot K}{p} + \frac{E_0 \cdot K}{(p - p_2)} \cdot \frac{\omega_0^2}{p_1^2 - \omega_0^2} + \frac{E_0 \cdot K}{(p - p_1)} \cdot \frac{\omega_0^2}{p_2^2 - \omega_0^2}$$

D'où une réponse :

$$s(t) = E_0 \cdot K \left[1 + \frac{\omega_0^2}{p_1^2 - \omega_0^2} e^{p_1 t} + \frac{\omega_0^2}{p_2^2 - \omega_0^2} e^{p_2 t} \right] \text{ avec } 0 < p_2 < p_1$$

Remarque : Ce système du second ordre peut être considéré comme la mise en cascade, ou le produit, de deux systèmes du premier ordre de constantes de temps

$$\tau_1 = -\frac{1}{p_1} = \frac{1}{\xi\omega_0 - \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}} \text{ et } \tau_2 = -\frac{1}{p_2} = \frac{1}{\xi\omega_0 + \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}}$$

Cas particulier où $\xi \gg 1$, c'est à dire $p_2 \ll p_1$ et $\tau_2 \gg \tau_1$

$$\text{On a alors } \approx \xi, \text{ d'où } p_2 \approx -2\xi\omega_0 \text{ et } p_1 = \frac{\omega_0^2}{p_2} \approx -\frac{\omega_0}{2\xi},$$

d'où pour t suffisamment 'grand' :

$$\frac{\omega_0^2}{p_2^2 - \omega_0^2} e^{p_2 t} \approx \frac{1}{4\xi^2 - 1} e^{p_2 t} \ll \frac{\omega_0^2}{p_1^2 - \omega_0^2} e^{p_1 t} \approx \frac{1}{\frac{1}{4\xi^2} - 1} e^{p_1 t} \approx -e^{p_1 t}$$

La réponse indicielle est donc $s(t) = E_0 \cdot K [1 - e^{p_1 t}]$ pour t suffisamment 'grand'.

Conclusion : La réponse indicielle d'un système du second ordre à coefficient d'amortissement très grand, c'est à dire d'un système du second ordre produit de 2 systèmes du premier ordre de constantes de temps très différentes, est approximativement la même que celle du système du premier ordre ayant la constante de temps la plus grande. La seule différence significative se situe à l'origine des temps. Pour le système du deuxième ordre, la tangente est horizontale.

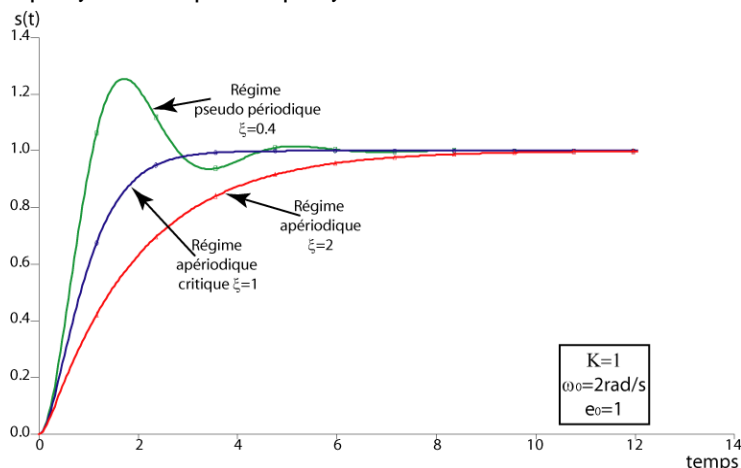
2.1.3. Cas n°3 : $\xi = 1$ Régime apériodique critique

Le dénominateur $\omega_0^2 + 2\xi\omega_0 p + p^2$ se factorise en $(p + \omega_0)^2$

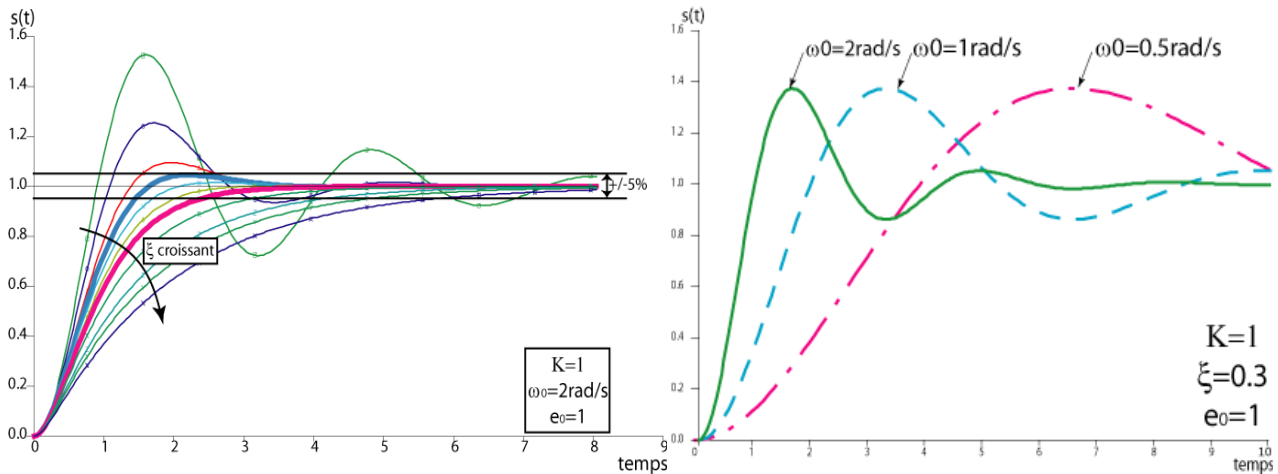
$$\text{On a donc } S(p) = \frac{E_0 \cdot K \cdot \omega_0^2}{p(p + \omega_0)^2} = \frac{E_0 \cdot K}{p} - \frac{E_0 \cdot K}{(p + \omega_0)} - \frac{E_0 \cdot K \cdot \omega_0}{(p + \omega_0)^2}$$

D'où une réponse $s(t) = E_0 \cdot K [1 - (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}]$

Régime apériodique critique $\xi = 1$ et apériodique $\xi > 1$



2.2. Influence des paramètres caractéristiques ω_0 et ξ



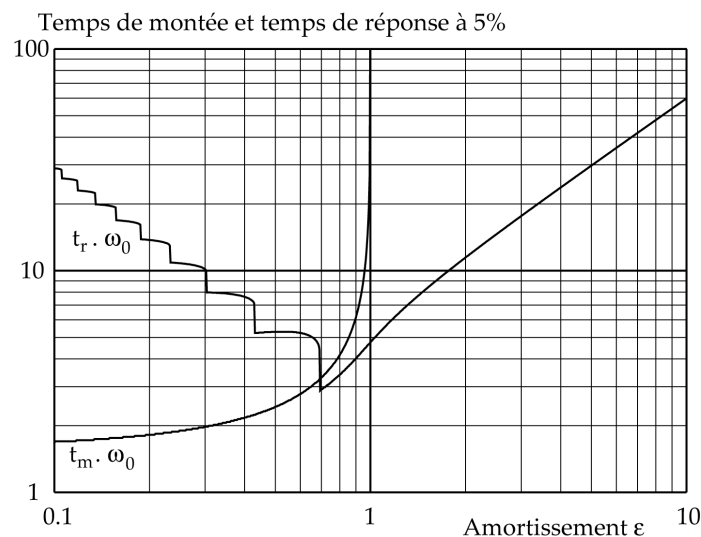
De la même manière que dans le cas d'un système du premier ordre, pour quantifier la rapidité de la réponse indicielle d'un système du second ordre, on définit le temps de réponse $t_{5\%}$.

Dans le cas de réponse apériodique $\xi > 1$, ce temps de réponse s'obtient en résolvant :

$$s(t_{5\%}) = 0.95KE_0$$

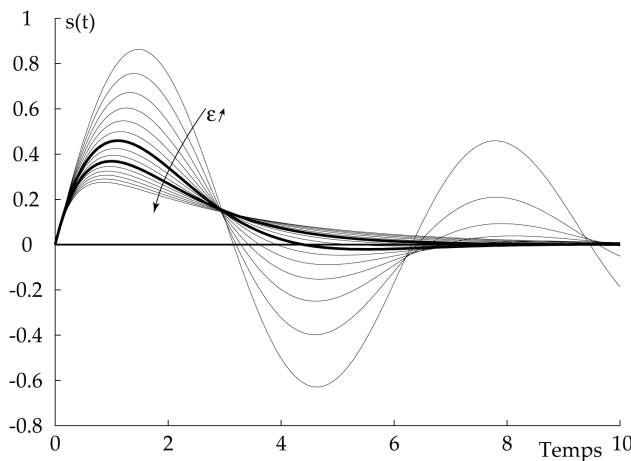
Dans le cas de réponse oscillatoire $\xi < 1$, il convient de déterminer le temps au bout duquel la valeur de la réponse entre dans l'intervalle $[0.95s(+\infty), 1.05s(+\infty)]$ et n'en sort plus.

On peut montrer que le système le plus rapide, au sens du temps réponse à 5%, est le système pour lequel $\xi \approx 0,7 \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$ (le premier dépassement vaut $1,05.K.e_0$) et $t_{5\%} \approx \frac{3}{\omega_0}$

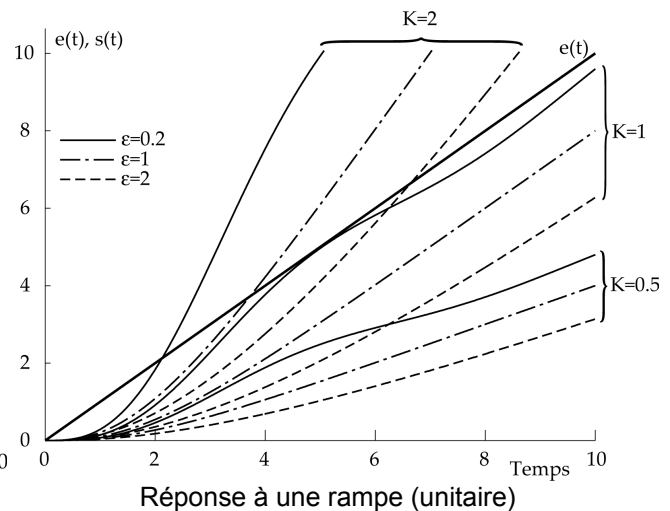


Le temps de réponse minimum (réponse indicielle) est atteint pour $\xi \approx 0,7$. Au delà de $\xi = 1$, la courbe est régulière car il n'y a plus de dépassement. Les bosses de la partie gauche de la courbe sont dues aux sauts d'un extremum à un autre du temps de réponse. Le temps de montée correspond au temps de la première intersection de la réponse avec l'asymptote. Cette valeur devient infinie pour $\xi \geq 1$ puisqu'il n'y a plus de dépassement.

2.3. Réponse des systèmes à d'Autres signaux tests



Réponse impulsionnelle (unitaire)



Réponse à une rampe (unitaire)

3. Réponse Fréquentielle ou Harmonique

En remplaçant p par $j\omega$ dans la fonction de transfert généralisée $H(p)$, on obtient :

$$\frac{S(j\omega)}{E(j\omega)} = \underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_0} + \left(j \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Les paramètres à identifier sont le gain statique K , le coefficient d'amortissement ξ et la pulsation propre ω_0 .

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arg}(H(j\omega)) = -\arctan \frac{2\xi \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad \left(\text{si } 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 > 0\right)$$

- **lorsque** $\omega \rightarrow 0$

Alors $|H(j\omega)| \approx K$ d'où une asymptote horizontale

Et $\text{Arg}(H(j\omega)) \approx \text{Arg}(K) \approx 0^\circ$

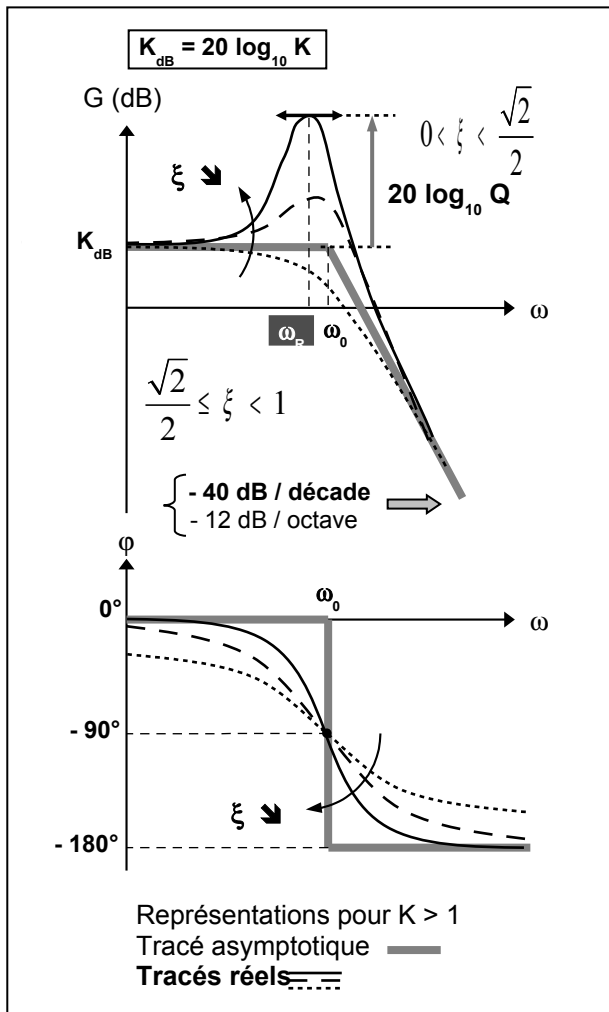
- **lorsque** $\omega \rightarrow +\infty$

Alors $|H(j\omega)| \approx \frac{K}{\omega^2}$ et $20 \log |H(j\omega)| \approx 20 \log K + 20 \log \omega_0^2 - 40 \log \omega$

d'où une asymptote de pente -40dB par décade

Et $\text{Arg}(H(j\omega)) \approx -\arctan \frac{2\xi}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - 180^\circ$; $0 - 180^\circ$ d'où $\text{Arg}(H(j\omega)) \approx -180^\circ$

3.1. Cas n°1 : Régime pseudo périodique ($0 < \xi < 1$)



- La pulsation ω_0 correspond à la pulsation où se coupent les asymptotes horizontale et oblique de pente **- 40 dB / décade**.

$$|H(j\omega_0)| = \frac{K}{2\xi}$$

$$\text{Arg}(H(j\omega_0)) = -90^\circ$$

- La pulsation de résonance ω_R est liée à ξ et à la pulsation ω_0 par la relation :

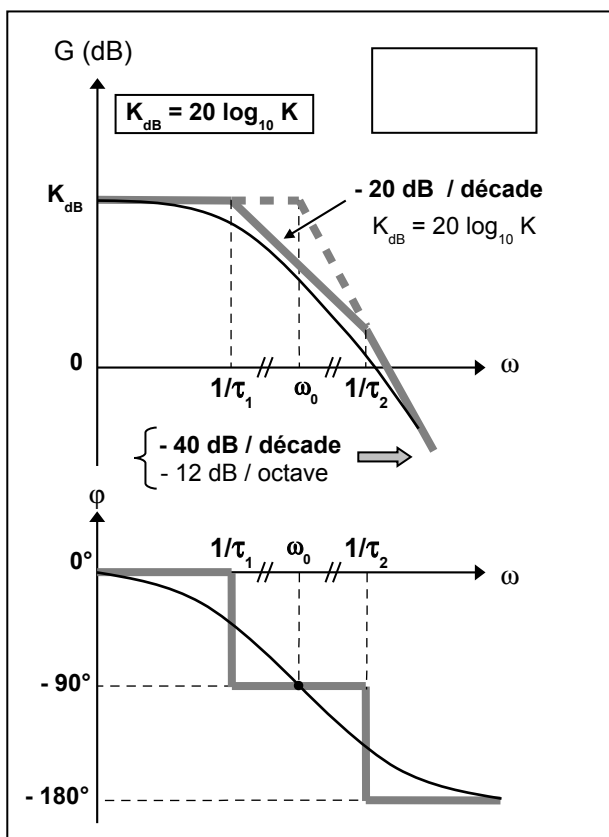
$$\omega_R = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Celle-ci n'est définie que pour $0 < \xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

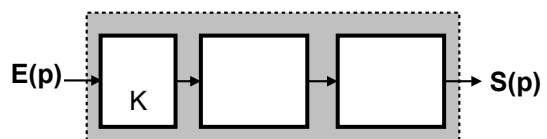
$$|H(j\omega_r)| = \frac{K}{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Pour $\sqrt{2}/2 \leq \xi < 1$, la courbe de gain est toujours au-dessous des asymptotes

3.2. Cas n°2 : Système du 2nd ordre non oscillant amorti ($\xi \geq 1$)



Si $\xi > 1$, le système peut être considéré comme le produit de deux 1^{er} ordres de constantes de temps τ_1 et τ_2 :



- La pulsation ω_0 , pulsation pour laquelle la phase vaut **- 90°**, est au milieu des pulsations $\omega_1 = 1/\tau_1$ et $\omega_2 = 1/\tau_2$ en échelle logarithmique.

$$\log_{10} \omega_0 = \frac{\log_{10} \omega_1 + \log_{10} \omega_2}{2}$$

puisque : $\omega_0^2 = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = \omega_1 \cdot \omega_2$

On préférera pour ces systèmes une identification à partir d'une **réponse indicielle**.