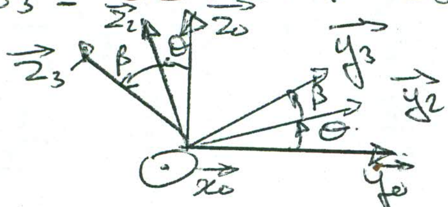
DM de SI Calcul vectoriel.

Exercice 1 :

Q1) $\overrightarrow{OG_3} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG_3} = y_{ch}(t)\,\overrightarrow{y_0} - L\,\overrightarrow{z_2} - h\,\overrightarrow{z_3}$

Q2)



Q3)

- $\overrightarrow{y_2} = \cos\theta\,\overrightarrow{y_0} + \sin\theta\,\overrightarrow{z_0}$
- $\overrightarrow{y_3} = \cos(\theta+\beta)\,\overrightarrow{y_0} + \sin(\theta+\beta)\,\overrightarrow{z_0}$
- $\overrightarrow{y_0} = \cos(\theta+\beta)\,\overrightarrow{y_3} - \sin(\theta+\beta)\,\overrightarrow{z_3}$

Q4) $\overrightarrow{OG_3} \cdot \overrightarrow{y_0} = y_{ch}(t) + L\sin\theta + h\sin(\theta+\beta)$ (projection de $\overrightarrow{OG_3}$ sur $\overrightarrow{y_0}$).

$\overrightarrow{OG_3} \cdot \overrightarrow{z_0} = -L\cos\theta - h\cos(\theta+\beta)$ (projection de $\overrightarrow{OG_3}$ sur $\overrightarrow{z_0}$)

Q5) $(L+h)\Delta\theta = \pm 20\,\text{cm} = 0{,}2$ | $\Delta\theta = \dfrac{0{,}2}{L+h} = \dfrac{0{,}2}{63} = 0{,}0317\,\text{rad} = 0{,}18°$.

Q6) Le problème est plan, toutes les rotations sont suivant $\overrightarrow{x_0}$. or $\overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0}$ car il s'agit d'une translation.

d'où $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = (\dot\theta + \dot\beta)\,\overrightarrow{x_0}$.

Q7)

- $\left.\dfrac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{B_0} = \cancel{\left.\dfrac{d\overrightarrow{z_2}}{dt}\right]_{B_2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{z_2} =$

- $\left.\dfrac{d\overrightarrow{y_3}}{dt}\right]_{B_0} = \cancel{\left.\dfrac{d\overrightarrow{y_3}}{dt}\right]_{B_3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/0}} \wedge \overrightarrow{y_3} = (\dot\theta+\dot\beta)\,\overrightarrow{x_0} \wedge \overrightarrow{y_3} = (\dot\theta+\dot\beta)\,\overrightarrow{z_3}$

Q8) $\overrightarrow{V}(G_3, 3/0) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OG_3}}{dt}\right]_{B_0} = \dot y_{ch}(t)\,\overrightarrow{y_0} + L\dot\theta\,\overrightarrow{y_2} + h(\dot\theta+\dot\beta)\,\overrightarrow{y_3}$

Rq : $\left.\dfrac{d\overrightarrow{z_3}}{dt}\right]_{B_0} = -(\dot\theta+\dot\beta)\,\overrightarrow{y_3}$

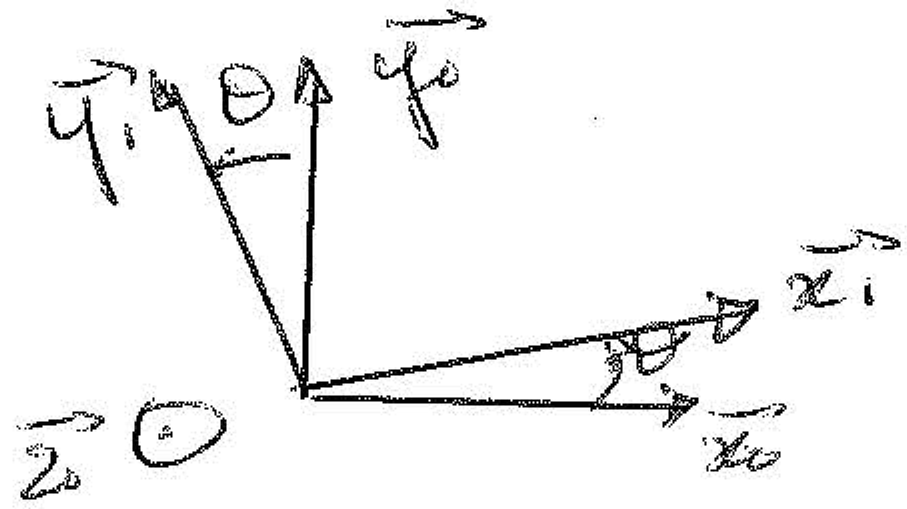
Q9) $\overrightarrow{\Gamma_{3/0}}(G_3) = \ddot y_{ch}(t)\,\overrightarrow{y_0} + L\ddot\theta\,\overrightarrow{y_2} + L\dot\theta^2\,\overrightarrow{z_2} + h(\ddot\theta+\ddot\beta)\,\overrightarrow{y_3}$
$+ h(\dot\theta+\dot\beta)^2\,\overrightarrow{z_3}$.

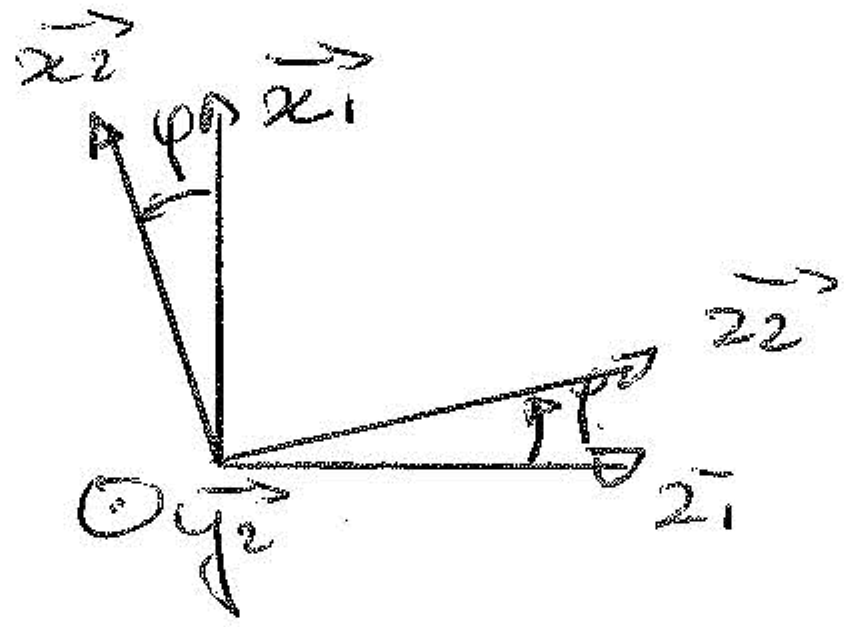
Q10) $\overrightarrow{\Gamma_{3/0}}(G_3) = \ddot y_{ch}(t)\left(\cos\theta\,\overrightarrow{y_2} - \sin\theta\,\overrightarrow{z_2}\right) + L\ddot\theta\,\overrightarrow{y_2} + L\dot\theta^2\,\overrightarrow{z_2}$
$+ h(\ddot\theta+\ddot\beta)(\cos\beta\,\overrightarrow{y_2} + \sin\beta\,\overrightarrow{z_2})$
$+ h(\dot\theta+\dot\beta)^2(\cos\beta\,\overrightarrow{z_2} - \sin\beta\,\overrightarrow{y_2})$

2- Centrifugeuse de Laboratoire.

Q11) $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = R\vec{x_1} + L\vec{x_2}$

Q12)





Q13) $\vec{z_2} = \cos\varphi\,\vec{z_1} + \sin\varphi\,\vec{x_1}$

Q14) $\vec{y_0} = \cos\theta\,\vec{y_1} + \sin\theta\,\vec{x_1} = \cos\theta\,\vec{y_2} + \sin\theta(\cos\varphi\,\vec{x_2} + \sin\varphi\,\vec{z_2})$.

Q15) $\vec{OB}\cdot\vec{x_1} = R + L(\vec{x_2}\cdot\vec{x_1}) = R + L\cos\varphi$.

Q16) $\vec{x_2}\wedge\vec{x_0} = -\sin\varphi\,\vec{y_2}$

Q17) $\vec{\Omega_{1/0}} = \dot\theta\,\vec{z_0}$ $\qquad$ $\vec{\Omega_{2/1}} = \dot\varphi\,\vec{y_2}$

$\vec{\Omega_{2/0}} = \vec{\Omega_{2/1}} + \vec{\Omega_{1/0}} = \dot\theta\,\vec{z_0} + \dot\varphi\,\vec{y_2}$

Q18) $\vec{V_{B2/0}} = R\dot\theta\,\vec{y_1} + L\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right|_{B_0}$

$$\left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right|_{B_0} = \left.\frac{d\vec{x_2}}{dt}\right|_{B_2} + (\dot\theta\,\vec{z_1} + \dot\varphi\,\vec{y_2})\wedge\vec{x_2}$$

$$= \dot\theta\cos\varphi\,\vec{y_2} - \dot\varphi\,\vec{z_2}$$

$$\vec{V_{B2/0}} = R\dot\theta\,\vec{y_1} + L(\dot\theta\cos\varphi\,\vec{y_2} - \dot\varphi\,\vec{z_2})$$

Q19) $\vec{\Gamma_{B2/0}} = \left.\frac{d\vec{V_{B2/0}}}{dt}\right|_{B_0}$

$$= R\ddot\theta\,\vec{y_1} + R\dot\theta\left.\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right|_{B_0} + L\ddot\theta\cos\varphi\,\vec{y_2}$$

$$- L\dot\theta\dot\varphi\sin\varphi\,\vec{y_2} + L\dot\theta\cos\varphi\left.\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right|_{B_0}$$

$$- L\ddot\varphi\,\vec{z_2} - L\dot\varphi\left.\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right|_{B_0}$$

Q19) Suite

$$* \left.\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right)_{B_0} = \left.\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right)_{B_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \vec{y_1} = -\dot{\theta}\vec{x_1}$$

$$* \left.\frac{d\vec{y_2}}{dt}\right)_{B_0} = \left.\frac{d\vec{y_1}}{dt}\right)_{B_1} = -\dot{\theta}\vec{x_1}$$

$$* \left.\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right)_{B_0} = \left.\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right)_{B_2} + (\dot{\varphi}\vec{y_2} + \dot{\theta}\vec{z_1}) \wedge \vec{z_2}$$

$$= \dot{\varphi}\vec{x_2} + \dot{\theta}\sin\varphi\vec{y_2}$$

$$\overrightarrow{\Gamma_{B2/0}} = \left| \begin{array}{l} (-R\dot{\theta}^2\cos\varphi - L\dot{\theta}^2\cos^2\varphi - L\dot{\varphi}^2)\vec{x_2} \\ (R\ddot{\theta} + L\ddot{\theta}\cos\varphi - L\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi - 2L\dot{\varphi}\dot{\theta}\sin\varphi)\vec{y_2} \\ (-R\dot{\theta}^2\sin\varphi - L\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\varphi - L\ddot{\varphi})\vec{z_2} \end{array} \right.$$

Q20) $\dot{\theta} = \omega$; $\ddot{\theta} = 0$; $\varphi = c^{ste} \Rightarrow \dot{\varphi} = 0$

$$\overrightarrow{\Gamma_{B2/0}} = \left| \begin{array}{l} (-R\omega^2\cos\varphi - L\omega^2\cos^2\varphi)\vec{x_2} \\ 0 \\ (-R\omega^2\sin\varphi - L\omega^2\cos\varphi\sin\varphi)\vec{z_2} \end{array} \right.$$

$$\|\overrightarrow{\Gamma_{B2/0}}\| = R\omega^2 + L\omega^2\cos\varphi$$

- $N = 2000$ tr/min $\xrightarrow{A.N.}$ $\|\overrightarrow{\Gamma_{B2/0}}\| = \left(\frac{2000 \times 2\pi}{60}\right)^2 [0{,}15 + 0{,}1\cos 9]$
  $\hookrightarrow \varphi = 9°$
  $= 109{,}12\ m.s^{-2}$

- $N = 10000$ tr/min $\quad \|\overrightarrow{\Gamma_{B2/0}}\| = \left(\frac{10000 \times 2\pi}{60}\right)^2 [0{,}15 + 0{,}1\cos 1]$
  $\hookrightarrow \varphi = 1°$
  $= 274 \cdot 10^3\ m/s^2$
  $= 27946\ G$

Exercice 3 :

Q 21)

$A_1 : (R, 0, 0)$.

$A_2 : \left(R\cos\frac{2\pi}{3} ; R\sin\frac{2\pi}{3} ; 0\right) = \left(-\frac{R}{2} ; \frac{R\sqrt{3}}{2} ; 0\right)$.

$A_3 : \left(R\cos\frac{4\pi}{3} ; R\sin\frac{4\pi}{3} ; 0\right) = \left(-\frac{R}{2} ; -\frac{R\sqrt{3}}{2} ; 0\right)$.

Q 22)

$$\overrightarrow{MB_1} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1B_1}$$

$$= \left(-x\vec{x} - y\vec{y} - z\vec{z} + R\vec{x} + \lambda_1\vec{z}\right).$$

$$= (R-x)\vec{x} - y\vec{y} + (\lambda_1 - z)\vec{z}.$$

Q 23)

$$\|\overrightarrow{MB_1}\| = L. = \sqrt{(R-x)^2 + y^2 + (\lambda_1 - z)^2}$$

On élève les 2 termes de l'équation au carré.

$$L^2 = (R-x)^2 + y^2 + (\lambda_1 - z)^2.$$

$$(\lambda_1 - z)^2 = L^2 - (R-x)^2 - y^2.$$

$$(\lambda_1 - z) = \sqrt{L^2 - (R-x)^2 - y^2}$$

$$\lambda_1 = \sqrt{L^2 - (R-x)^2 - y^2} + z$$

PCSI **DS N°2**

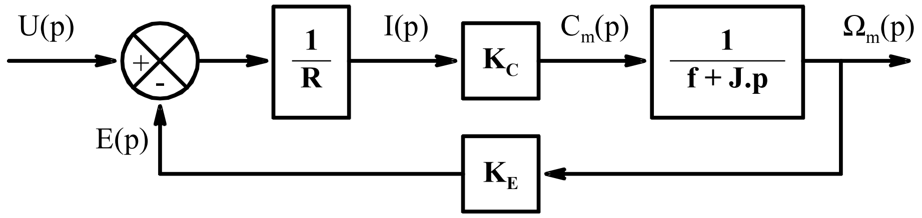
CABLECAM (D'après concours E3A MP 2008)

1ière partie : Modélisation du motoréducteur

1.1- Les conditions initiales étant nulles, donner la transformée de Laplace des équations sont:

$\mathbf{U(p) = E(p) + R.I(p)}$ $\mathbf{E(p) = K_E.\Omega_P(p)}$ $\mathbf{C_P(p) = (f + J.p).\Omega_P(p)}$ $\mathbf{C_P(p) = K_C.I(p)}$

On en déduit le schéma bloc modélisant le motoréducteur :



1.2- On en déduit l'expression de la fonction de transfert du motoréducteur : $H_m(p) = \dfrac{\Omega_P(p)}{U(p)}$:

$$H_m(p) = \frac{\dfrac{K_C}{R.f + R.J.p}}{1 + \dfrac{K_C.K_E}{R.f + R.J.p}} \qquad \text{Soit après calcul :} \qquad \mathbf{H_m(p) = \frac{\dfrac{K_C}{K_C.K_E + R.f}}{1 + \dfrac{R.J}{K_C.K_E + R.f}.p}}$$

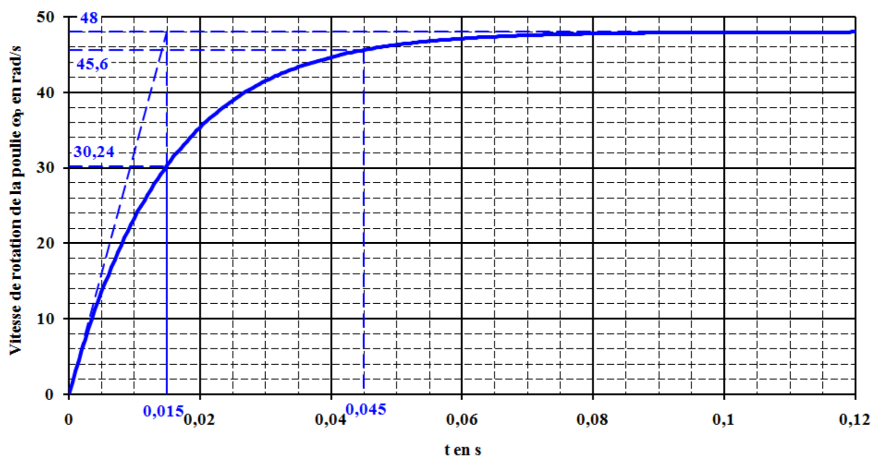
1.3- D'où des éléments caractéristiques de cette fonction de transfert :

Le gain statique : $\mathbf{K_m = \dfrac{K_C}{K_C.K_E + R.f}}$ et la constante de temps : $\mathbf{\tau = \dfrac{RJ}{K_C.K_E + R.f}}$

1.4- La tangente à l'origine de la courbe expérimentale n'étant pas horizontale, la fonction de transfert du moteur est une fonction de transfert du premier ordre. de la forme : $H_m(p) = \dfrac{K_m}{1+\tau.p}$

On relève sur cette courbe l'expérimentale :

- ☞ Une valeur finale de 48 $rad.s^{-1}$.
- ☞ La date à laquelle la courbe atteint 63% de la valeur finale (30,24 $rad.s^{-1}$) : $t = \tau = 0{,}015$ s
- ☞ La date à laquelle la courbe atteint 95% de la valeur finale (45,6 $rad.s^{-1}$) : $t_{5\%} = 3.\tau = 0{,}045$ s
- ☞ L'abscisse à laquelle la tangente à l'origine coupe l'horizontale correspondant à la valeur finale : $t = \tau = 0{,}015$ s



Le premier relevé permet de déterminer le gain statique : $K_m = \dfrac{48}{24} = 2\ rad.s^{-1}.V^{-1}$

Les trois autres relevé la même constante de temps : $\tau = 0{,}015$ s

D'où l'expression de la fonction de transfert du moteur : $\mathbf{H_m(p) = \dfrac{2}{1 + 0{,}015.p}}$

1.5- Ayant $K_m = \dfrac{K_C}{K_C.K_E + R.f}$ On en déduit : $\mathbf{f = \dfrac{K_C - K_m.K_C.K_E}{R.K_m}}$

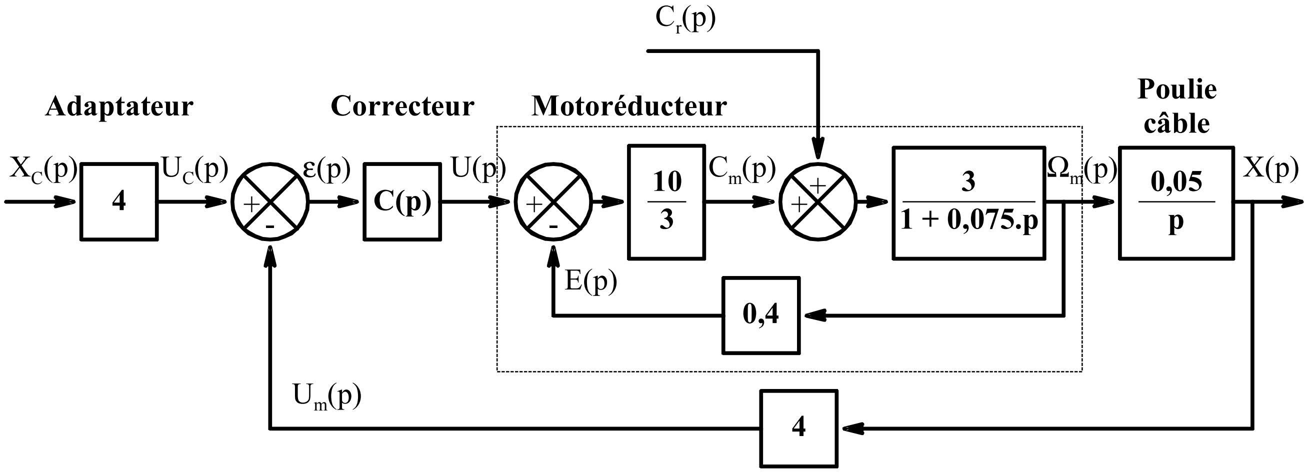
D'où le coefficient de frottement visqueux : $\mathbf{f = \dfrac{0,4 - 0,4\times0,4\times2}{0,12 \times 2} = 0,333\ N.m.s.rad^{-1}}$

D'autre part ayant $\tau = \dfrac{RJ}{K_C.K_E + R.f}$ On en déduit : $\mathbf{J = \dfrac{\tau.(K_C.K_E + R.f)}{R}}$

D'où l'inertie des pièces en mouvement : $\mathbf{J = \dfrac{0,015.(0,4\times0,4 + 0,12\times0,333)}{0,12} = 2,5.10^{-2}\ kg.m^2}$

2ième partie : Condition sur le gain du correcteur en fonction de la consigne.

Schéma bloc de l'asservissement :



2.1- Du schéma bloc on calcule la fonction de transfert du moteur pour une perturbation nulle :

$$H_m(p) = \frac{\Omega_P(p)}{U(p)} = \frac{\dfrac{10}{1 + 0,075.p}}{1 + \dfrac{4}{1 + 0,075.p}} = \frac{10}{5 + 0,075.p}$$

On en déduit la fonction de transfert de l'asservissement pour une perturbation nulle :

$$H_1(p) = \frac{X(p)}{X_C(p)} = 4 \cdot \frac{\dfrac{10.K_P.0,05}{5.p + 0,075.p^2}}{1 + \dfrac{10.K_P.0,05\times4}{5.p + 0,075.p^2}} = \frac{2.K_P}{2.K_P + 5.p + 0,075.p^2}$$

Soit sous sa forme canonique : $\mathbf{H_1(p) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{2,5}{K_P}.p + \dfrac{0,0375}{K_P}.p^2}}$

2.2- Cette fonction de transfert est donc une fonction de transfert du second ordre avec :

- ☞ Un gain statique de : $\mathbf{K_1 = 1}$
- ☞ Une pulsation propre non amortie de : $\mathbf{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_P}{0,0375}}}$
- ☞ Un facteur d'amortissement de : $\mathbf{m = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{K_P}{0,0375}} \cdot \dfrac{2,5}{K_P} = \dfrac{1,25}{\sqrt{0,0375.K_P}}}$

2.3- Le gain de cette fonction de transfert étant de 1, l'erreur statique en réponse à un échelon de consigne est nulle. **Le critère de précision du cahier des charges est donc vérifié.**

2.4- Cette fonction de étant du second ordre il n'y aura pas de dépassement de la valeur finale en réponse à un échelon de consigne si le facteur d'amortissement est supérieur à 1. Soit $\dfrac{1{,}25}{\sqrt{0{,}0375.K_P}} > 1$

D'où la condition sur le gain du correcteur : $K_P \leq \dfrac{1{,}25^2}{0{,}0375}$ soit: $\mathbf{K_P \leq 41{,}6}$

3ième partie : Condition sur le gain du correcteur en fonction de la perturbation.

3.1- Etant donné l'équivalence des schémas blocs on en déduit :

$$\mathbf{F_1(p) = \frac{10}{3}} \qquad \mathbf{F_2(p) = 0{,}4 \,.\, \frac{p}{0{,}05} = 8.p} \qquad \text{et :} \qquad \mathbf{F_3(p) = 4.K_P}$$

On en déduit également: $\mathbf{F_4(p) = F_1(p) \times [\, F_2(p) + F_3(p)\,] = \frac{10}{3}.(\,8.p + 4.K_P\,)}$

3.2- Du 2ième schéma bloc équivalent on en déduit la fonction de transfert pour une consigne nulle :

$$H_2(p) = \frac{X(p)}{C_r(p)} = \frac{\dfrac{0{,}15}{p + 0{,}075.p^2}}{1 + \dfrac{0{,}15}{p + 0{,}075.p^2} \cdot \dfrac{10}{3}.(\,8.p + 4.K_P\,)} = \frac{0{,}15}{p + 0{,}075.p^2 + 4.p + 2.K_P}$$

Soit sous sa forme canonique : $$\mathbf{H_2(p) = \frac{\dfrac{0{,}075}{K_P}}{1 + \dfrac{2{,}5}{K_P}.p + \dfrac{0{,}0375}{K_P}.p^2}}$$

3.3- Cette fonction de transfert est donc une fonction de transfert du second ordre avec :

- ☞ Un gain statique de : $\mathbf{K_2 = \dfrac{0{,}075}{K_P}}$
- ☞ Une pulsation propre non amortie de : $\mathbf{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_P}{0{,}0375}}}$
- ☞ Un facteur d'amortissement de : $\mathbf{m = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\dfrac{K_P}{0{,}0375}} \cdot \dfrac{2{,}5}{K_P} = \dfrac{1{,}25}{\sqrt{0{,}0375.K_P}}}$

3.4- L'erreur de position induite par le couple résistant ΔX sera la valeur finale de x(t) soit $x(\infty)$ pour une consigne nulle et un couple résistant constant de Cr0.

Or dans ce cas : $X(p) = C_{r0}(p).H_2(p)$ avec: $C_{r0}(p) = \dfrac{C_{r0}}{p}$

On en déduit donc que : $\Delta X = K_2.C_{r0}$ D'où: $\mathbf{\Delta X = \dfrac{0{,}075}{K_P} \,.\, C_{r0}}$

3.5- Le cahier des charges sur la précision sera respecté pour : $\Delta X \leq 2\text{ mm} = 2.10^{-3}\text{ m}$

Pour un couple résistant de 0,4 N.m on a donc : $\dfrac{0{,}075}{K_P} \times 0{,}4 \leq 2.10^{-3}$ soit: $\mathbf{K_P \geq 15}$

4$^{\text{ième}}$ partie : Rapidité du système

4.1- On a vu dans les 2$^{\text{ième}}$ et 3$^{\text{ième}}$ parties que pour respecter le cahier des charges il faut un gain du correcteur tel que : $15 \le K_P \le 41$.

Or comme le facteur d'amortissement m de la fonction de transfert est supérieure à 1 (pour ne pas avoir de dépassement), plus le gain du correcteur est important plus le système est rapide.

D'où le choix d'un gain du correcteur K_P de 41, correspondant à $m \approx 1$.

4.2- La valeur du facteur d'amortissement étant de 1, l'abaque donne : $t_{5\%}.\omega_0 \approx 4,5$

Or : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_P}{0,0375}}$ Soit : $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{41}{0,0375}} = 33,1$ rad/s

D'où le temps de réponse à 5% du système : $\mathbf{t_{5\%} = \dfrac{4,5}{\omega_0} = \dfrac{4,5}{33,1} = 0,14\ s}$

4.3- Au temps de réponse à 5% le chariot sera à 5% de sa valeur finale.

Or les tubes sont espacés de 12 cm = 120 mm, donc au temps de réponse à 5%, on est a :

$120 \times 0,05 = 6$ mm de la positon désirée ce qui est supérieur à la précision attendue de 2 mm.

On ne peut donc pas effectuer un cliché des tubes avec un intervalle de temps correspondant au temps de réponse à 5% soit 0,14 s.

4.4- Si les tubes sont espacés de 24 cm = 0,24 m, comme le gain de l'adaptateur est de 4 $V.m^{-1}$, la tension de consigne sera de : $u_C = 0,24 \times 4 = 0,96$ V.

D'autre part au début du déplacement la position étant nulle, la tension mesurée u_m est nulle. Donc au début du déplacement l'écart entre ces deux tensions est de $\varepsilon = 0,96$ V.

Le gain du correcteur étant de $K_P = 41$ cela induit qu'il faut alimenter le moteur à courant continu avec une tension de : $u = 41 \times 0,96 = 39,4$ V. Ce qui est impossible car la tension d'alimentation du moteur est limitée à 24 V. Il y aura donc une saturation au niveau de l'alimentation du moteur.

Cette saturation induit donc que le système n'est plus linéaire, et donc que le temps de réponse à 5% ne peut plus se calculer avec un système linéaire (SLCI) comme fait ci-dessus.

Donc avec des tubes espacés de 24 cm le temps de réponse à 5% sera donc plus long.