

Modélisation des systèmes linéaires continus

1 Notion de modélisation

On distingue trois phases dans la modélisation :

1. Isoler le système étudié en positionnant la frontière
 2. Effectuer une décomposition en sous-systèmes plus facilement exploitable.
 3. Établir un modèle de connaissance ou de comportement pour chaque sous-système.
- Un **modèle de connaissance** est un **modèle obtenu à partir de lois physiques**. Cette modélisation est analytique et possède un **sens physique fort**.
 - Un **modèle de comportement** est un modèle dans lequel le sous-système est remplacé par une boîte noire. Le **comportement réel est identifié au mieux à partir de résultats expérimentaux**.

2 Cadre de l'Etude

Le cadre de l'étude que nous allons nous fixer cette année est celui des systèmes linéaires continus invariants monovariés. Ce sont généralement des systèmes dynamiques.

2.1 Système monovarié

|| Un système monovarié est un système ne possédant qu'une seule entrée et une seule sortie.

2.2 Système invariant

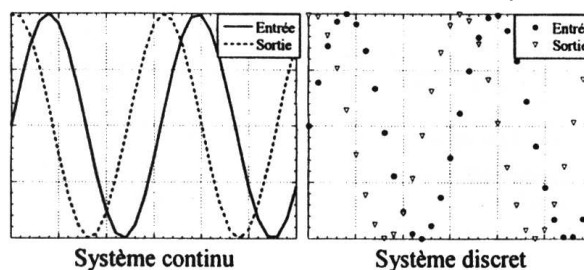
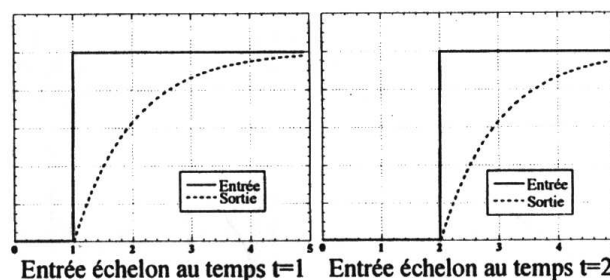
Un système invariant est un système dont les caractéristiques de comportement ne se modifient pas dans le temps (« le système ne vieillit pas »)

2.3 Système continu

|| Un système est **continu** est un système où les variables d'entrée et de sortie sont définies pour tout instant t .

Les signaux sont dits analogiques.

Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée informatiquement ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. Ce sont des systèmes et des signaux discrets.



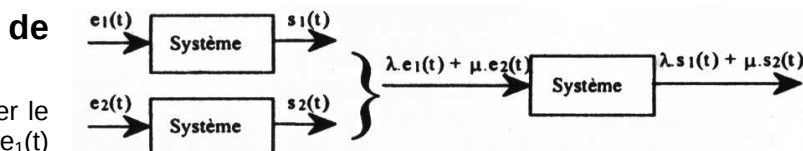
2.4 Système linéaire

|| Un système linéaire est un système où l'effet (signal de sortie) sera toujours proportionnel à la cause (signal d'entrée).

La relation de comportement d'un système linéaire peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Cette propriété sera à la base des développements ultérieurs.

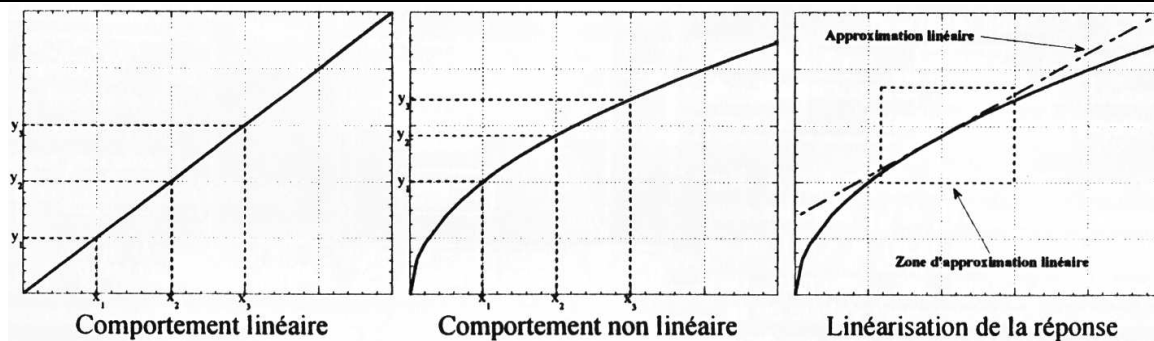
2.4.1 Principe superposition

Le système étant linéaire, nous pouvons appliquer le principe de superposition : soient deux entrées $e_1(t)$ et $e_2(t)$ donnés et $s_1(t)$ et $s_2(t)$ les sorties correspondantes :



2.4.2 Traitement des non linéarités

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur toute la totalité de leur domaine d'application. Cependant dans de nombreux cas, ils ne sont utilisés que sur une plage réduite de leur domaine. Sous ces conditions, il est possible en général d'approcher le comportement par un modèle linéaire. Le système est dit alors linéarisé.



2.4.3 Quelques non linéarités remarquables

Les systèmes réels présentent des non linéarités. Voici quelques cas très couramment observés :

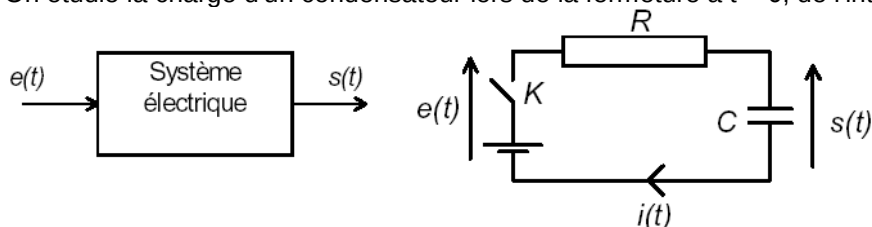
Dénomination	Saturation	Seuil	Hystérésis
Schéma			
Exemples	Butée mécanique, aimantation, moteur électrique	frottement	Jeux mécaniques, matériaux (élastomère)

3 Modélisation des systèmes linéaires continus invariants

Afin de prévoir le comportement du système, il s'agit d'être capable de proposer une équation reliant l'entrée et la sortie.

3.1 Exemple électrique :

On étudie la charge d'un condensateur lors de la fermeture à $t = 0$, de l'interrupteur K.



Pour $t < 0$, la charge du condensateur est nulle.

On a la loi des mailles :

Pour le condensateur:

On en déduit l'équation différentielle de la charge du condensateur

3.2 Exemple mécanique



On considère une masse m dont on étudie la variation de la position autour de la position d'équilibre repérée par $s(t)$ lorsqu'on lui applique un effort noté $e(t)$. Cette masse est liée à un bâti par deux éléments en parallèle : un ressort de raideur k et un amortisseur visqueux de coefficient b .

L'application du PFD à la masse en projection sur l'axe horizontal donne :

$$m \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b \frac{ds(t)}{dt} + ks(t) = e(t)$$

3.3 Cas général

Le modèle mathématique (ou modèle dynamique) de comportement d'un système mono variable, linéaire, continu et invariant peut être décrit une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^{(n)}s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = \underbrace{b_m \frac{d^{(m)}e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)}_{\text{(Second membre) } = f(t)} \quad \text{avec } n > m$$

Dans les cas pratiques rencontrés, on a toujours $m \leq n$, n est l'ordre du système.

Nous cherchons à **résoudre** l'équation différentielle ci-dessus.

La théorie permet de déterminer la sortie s en fonction de l'entrée e .

Souvent, c'est la démarche inverse que cherche à réaliser le concepteur de PC de systèmes : aussi, il veut connaître l'entrée à appliquer pour obtenir une sortie particulière. L'inversion de ces équations est alors plus délicate. La méthode de la transformation de Laplace va permettre de transformer les équations différentielles en équations algébriques qu'il sera plus aisé d'inverser. Ici va s'introduire la notion de fonction de transfert d'un système.

3.4 Fonction de transfert d'un système

3.4.1 Transformée de Laplace

Dans la suite on n'utilisera que des fonctions $f(t)$ telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. La transformée de Laplace d'une telle fonction est la fonction $F(p)$:

$$F(p) = L(f(t)) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

3.4.2 Fonction de transfert

Modèle mathématique de comportement :

$$a_n \frac{d^{(n)}s(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^{(m)}e(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{de(t)}{dt} + b_0 e(t)$$

Supposons les conditions initiales nulles (conditions de Heaviside) et appliquons la transformée de Laplace :

$$a_n p^n S(p) + \dots + a_1 p S(p) + a_0 S(p) = b_m p^m E(p) + \dots + b_1 p E(p) + b_0 E(p)$$

$$(a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0) \cdot S(p) = (b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0) \cdot E(p)$$

On appelle **Fonction de Transfert** ou **transmittance** la fonction $H(p)$:

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m p^m + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + \dots + a_1 p + a_0} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad \boxed{S(p) = H(p) \cdot E(p)}$$

La fonction de transfert du système est une fraction rationnelle en p .

En ordonnant les deux polynômes suivant les puissances croissantes de p , on obtient l'écriture suivante, encore appelée **forme canonique de la fonction de transfert** :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + b'_1 p + \dots}{1 + a'_1 p + \dots}$$

On définit :

- Les **pôles** : les racines du dénominateur
- Les **zéros** : les racines du numérateur
- **α classe du système**
- **K gain statique**

3.4.3 Exemple : Modélisation d'un moteur à courant continu

On rappelle ci-dessous les équations régissant le comportement d'un moteur à courant continu.

1. Equations électriques :

$$u_{(t)} = R i_{(t)} + L \frac{di_{(t)}}{dt} + e_{(t)} \quad \text{avec} \quad e_{(t)} = k \Omega_{(t)}$$

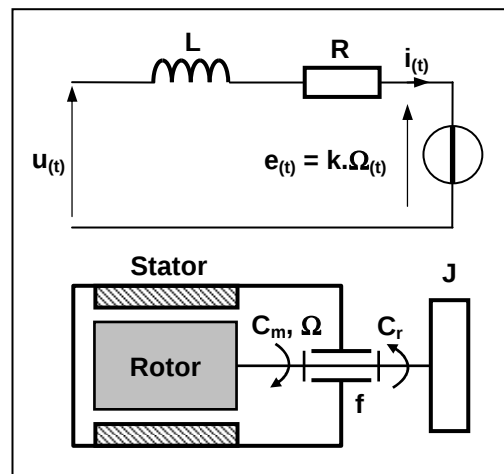
2. Equations mécaniques :

$$J \frac{d\Omega_{(t)}}{dt} = C_{m(t)} - C_{r(t)} - f \Omega_{(t)} \quad \text{et} \quad C_{m(t)} = k i_{(t)}$$

k est la constante de couple ou la constante de fcém.

On négligera par la suite le couple résistant : $C_r(t) = 0$.

Dans ces conditions, si on passe dans le **domaine de LAPLACE**, il vient :



Ce qui conduit à :

$$H(p) = \frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{k}{k^2 + Rf + (RJ + Lf)p + LJ(p)^2}$$

3.5 Représentation fonctionnelle : Schémas blocs

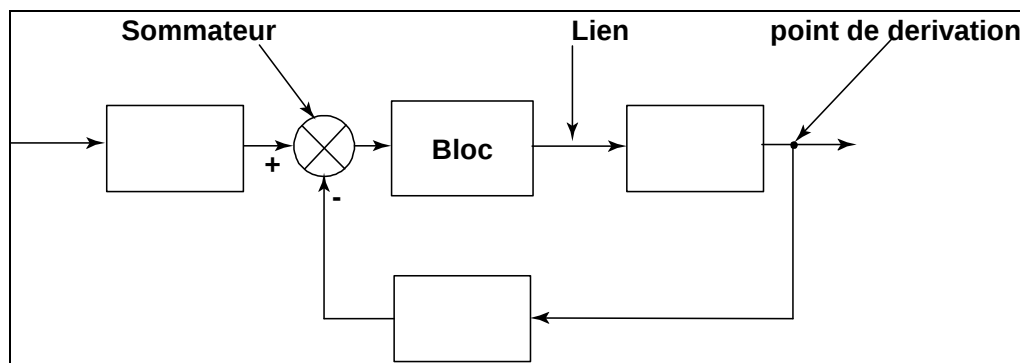
On a vu que la description d'un système conduisait à écrire plusieurs équations différentielles faisant intervenir plusieurs variables intermédiaires reliées entre elles. Le passage dans le domaine de LAPLACE (appelé aussi domaine symbolique) permet de linéariser le système d'équations.

La fonction de transfert globale du système est alors une combinaison des fonctions de transfert élémentaires. On peut définir cette fonction de transfert à l'aide des deux méthodes suivantes :

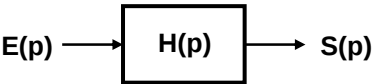
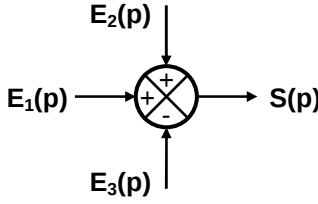
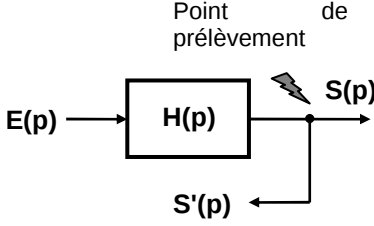
- (1) **Résoudre** le système d'équations définies dans le **domaine de LAPLACE** (exemple précédent)
- (2) **Construire** les schémas blocs de chaque fonction de transfert élémentaire, c'est à dire :
 - **Placer** les entrées et les sorties de chaque fonction de transfert en coïncidence, en reliant par exemple la sortie de la fonction de transfert 1 à l'entrée de la fonction de transfert 2, etc.
 - **Appliquer** les règles relatives aux schémas blocs
 - **Déterminer** la **Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)** ou en **Boucle Ouverte (FTBO)**.

Cette seconde méthode fournit une **vision graphique synthétique** de la modélisation du système. Il faut noter que la structure de cette image est souvent différente de la structure même du système

3.5.1 Eléments de base des schémas blocs

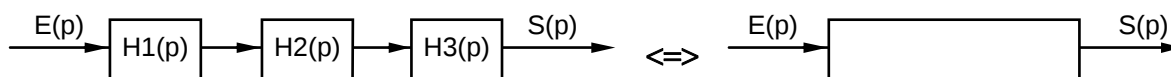


Pour représenter graphiquement la **structure d'un système asservi**, on utilise donc un **schéma bloc**. Cette technique de représentation utilise **trois éléments de base** qui représentent respectivement :

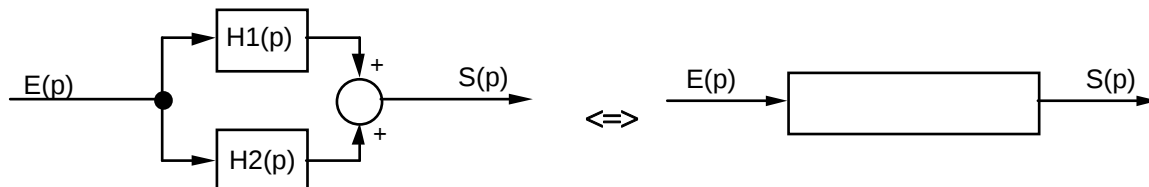
1. Le bloc	2. Le sommateur	3. La jonction
 $S(p) = H(p) \cdot E(p)$ Il représente une fonction de transfert ou transmittance. Il a une entrée et une sortie. Les flèches sont orientées de l'entrée vers la sortie.	 $S(p) = E_1(p) + E_2(p) - E_3(p)$ Il peut avoir plusieurs entrées mais une seule sortie. Les signes + ou - associés aux branches entrantes précisent si l'entrée s'additionne ou si elle se soustrait.	 $S'(p) = S(p) = H(p) \cdot E(p)$ Une branche de prélèvement prend le même signal que la branche principale et n'affecte pas le signal de cette branche principale.

3.5.2 Règles relatives aux schémas blocs

3.5.2.1 Transmittances en série



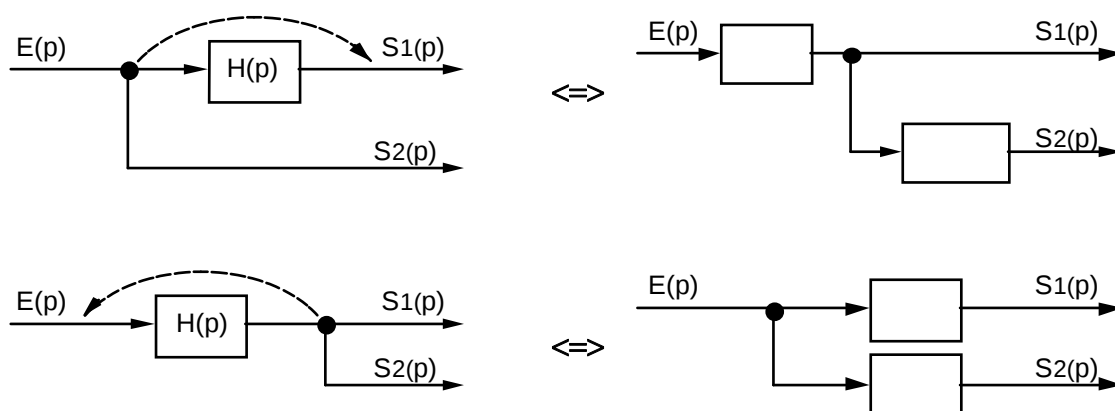
3.5.2.2 Transmittances en parallèle



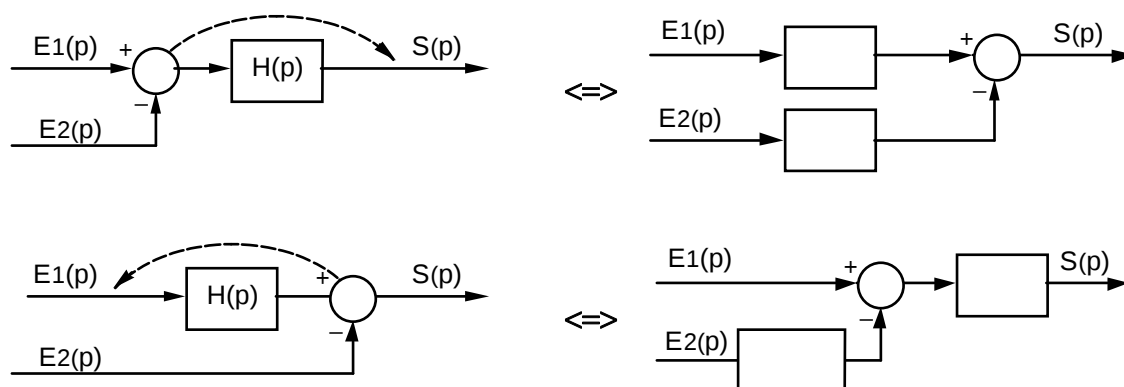
3.5.2.3 Déplacement des points de jonction et des sommateurs

Les schémas blocs peuvent subir des modifications en vue de les simplifier. La figure montre quelques schémas équivalents. L'inconvénient à modifier la structure du schéma est de perdre le lien entre les entrées/sorties du schéma et les grandeurs physiques du système étudié.

Déplacement des points de jonction



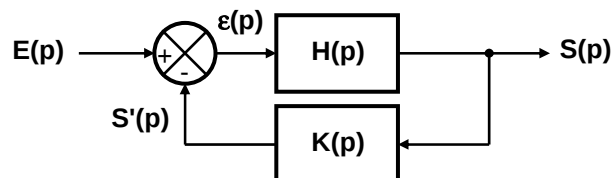
Déplacement des sommateurs



3.5.3 Fonction de transfert en boucle fermée

Soit un système asservi représenté par le schéma bloc ci-contre :

On note $H(p)$ et $K(p)$ les transmittances ou **fonctions de transfert** respectives de la **chaîne directe** et de la **chaîne de retour**.



L'utilisateur est surtout intéressé par le transfert global (**Boucle Fermée**) :

$$H_{BF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

On a :

Or :

⇒

$$H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + K(p)H(p)}$$

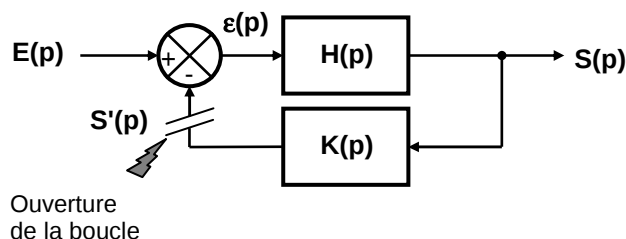
$H_{BF}(p)$ est appelée **FONCTION DE TRANSFERT EN BOUCLE FERMÉE** (notée FTBF).

✚ Astuce : $FTBF = \frac{\text{aller}}{1 + \text{aller_retour}}$

3.5.4 Fonction de transfert en boucle ouverte

On définit la **Fonction de Transfert en Boucle Ouverte** (FTBO) comme le rapport entre l'image de la sortie $S'(p)$ et l'écart $\varepsilon(p)$:

$$H_{BO}(p) = \frac{S'(p)}{\varepsilon(p)} = K(p)H(p)$$



Elle correspond à l'ouverture de la boucle, soit sa coupure au niveau du comparateur. C'est le produit des fonctions de transfert des chaînes directes et de retour.

D'où la généralisation de l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée :

$$FTBF = \frac{\text{Fonction de transfert de la chaîne directe}}{1 + FTBO}$$

soit

$$H_{BF}(p) = \frac{H(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

On remarque que pour un **système à retour unitaire** ($K(p) = 1$), on a :

$$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)}$$

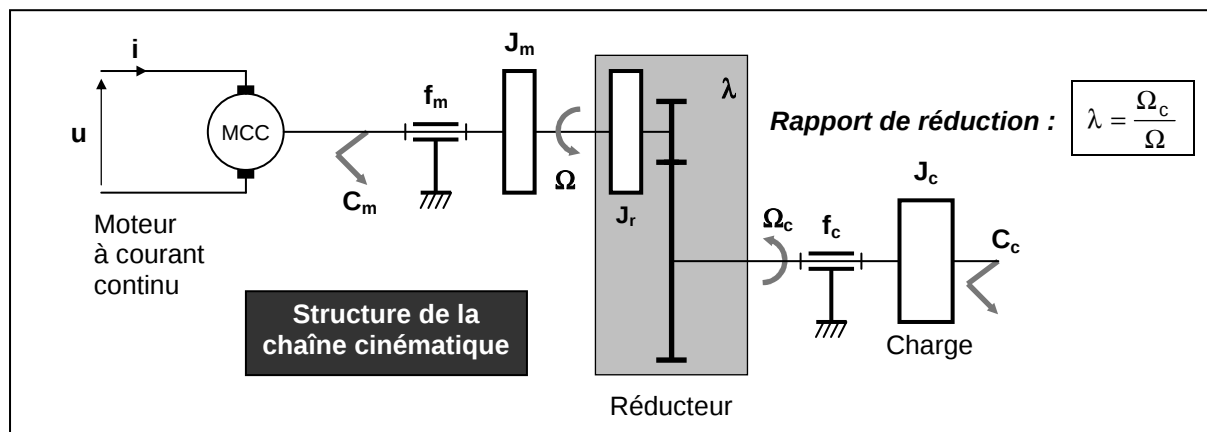
Intérêt de la FTBO :

La FTBO est d'un grand intérêt pour l'étude d'un système asservi, même si elle ne le représente pas directement. En effet, son analyse harmonique (diagramme de Bode) permettra d'estimer les performances temporelles (précision, rapidité et amortissement) du système en boucle fermée.

4 Applications

4.1 Exemple n°1 :

Modélisation d'une motorisation par moteur à courant continu (MCC)



On note : J_m , J_r et J_c les moments d'inertie respectifs du moteur, du réducteur et de la charge.
 f_m , f_r et f_c les coefficients de frottements visqueux du moteur, du réducteur et de la charge.

La conservation de l'énergie cinétique du système donne :

$$J = J_m + J_r + J_c \lambda^2 \quad \text{et} \quad f = f_m + f_r + f_c \lambda^2$$

Avec : J moment d'inertie équivalent ramené à l'arbre moteur (en kg.m^2)
 f coefficient de frottements visqueux équivalent rapporté à l'arbre moteur (en Nm.s.rad^{-1})

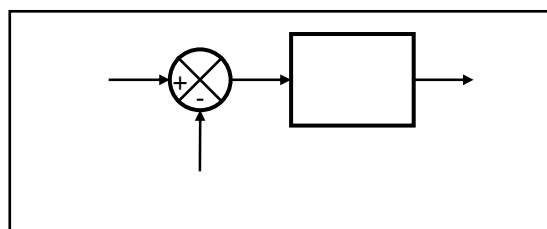
Si on passe dans le **domaine de LAPLACE** en supposant toutes les conditions initiales nulles :

Equations électriques :

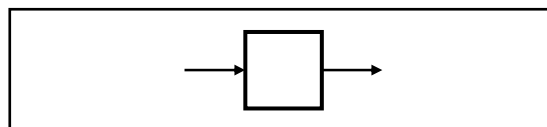
$$\text{On a : } u_{(t)} = R i_{(t)} + L \frac{di_{(t)}}{dt} + e_{(t)}$$

$\Rightarrow$

d'où le schéma :



$$\text{On a : } e_{(t)} = k \Omega_{(t)} \quad \Rightarrow$$

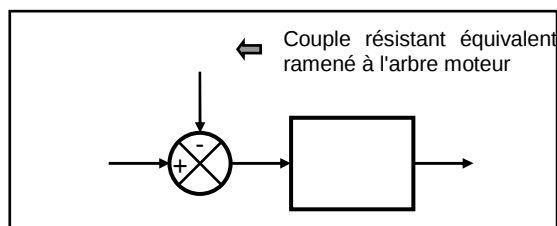


Equations mécaniques :

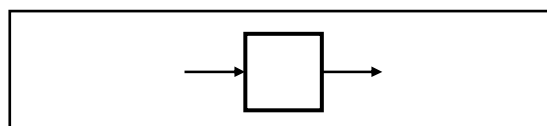
$$\text{On a : } J \frac{d\Omega_{(t)}}{dt} = C_{m(t)} - C_{r(t)} - f \Omega_{(t)}$$

$\Rightarrow$

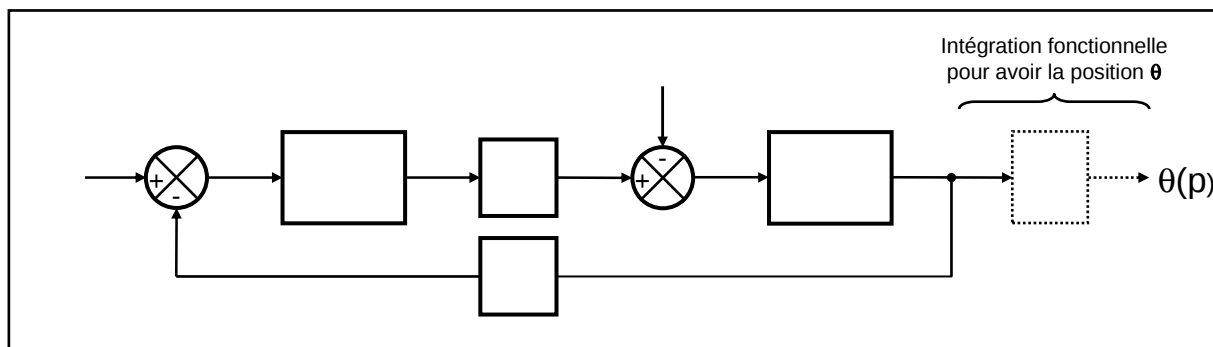
d'où le schéma :



$$\text{On a : } C_{m(t)} = k i_{(t)} \quad \Rightarrow$$



L'entrée du système étant la tension de commande $u(t)$ et la sortie étant la vitesse angulaire $\Omega(t)$, on obtient en associant les blocs ci-dessous :



Ce modèle est à lire avec de nombreuses précautions !

En effet, les différenciateurs ne représentent pas des objets "comparateur" effectivement présents dans le système. Le premier différenciateur exprime que la tension disponible pour générer le courant I vaut $U - E$. Le second exprime que le couple disponible pour vaincre l'inertie et les frottements visqueux de toute la chaîne cinématique est le couple généré par le moteur C_m diminué du couple résistant C_r .

Il s'agit dans les deux cas de la **traduction graphique** d'un modèle de comportement.

De ce modèle, on tire :

$$\Omega(p) = \frac{1}{f + Jp} \cdot [C_m(p) - C_r(p)] = \frac{1}{f + Jp} \cdot \left[\frac{k}{R + Lp} \cdot (U(p) - k\Omega(p)) - C_r(p) \right]$$

Soit :

$$\Omega(p) \cdot \left[1 + \frac{k^2}{(f + Jp) \cdot (R + Lp)} \right] = \frac{1}{f + Jp} \cdot \left[\frac{k}{R + Lp} \cdot U(p) - C_r(p) \right]$$

D'où :

$$\Omega(p) = \frac{k}{k^2 + Rf + (RJ + Lf)p + LJ(p)^2} \cdot U(p) - \frac{R + Lp}{k^2 + Rf + (RJ + Lf)p + LJ(p)^2} \cdot C_r(p)$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\Omega(p) = F_1(p) \cdot U(p) - F_2(p) \cdot C_r(p)$$

- La fonction $F_1(p) = \left(\frac{\Omega(p)}{U(p)} \right)_{C_r=0}$ correspond au fonctionnement de type **suiveur** du système.
- La fonction $F_2(p) = \left(\frac{\Omega(p)}{C_r(p)} \right)_{U=0}$ correspond au fonctionnement de type **régulateur** du système.

On vérifie que les deux fonctions de transfert ont le même dénominateur. C'est de cet unique dénominateur que dépendra la stabilité du système.