



Boîte de vitesses

Compétences

B2-11	Proposer une modélisation des liaisons avec leurs caractéristiques géométriques.	Liaisons (liaisons parfaites, degrés de liberté, classe d'équivalence cinématique, géométrie des contacts entre deux solides, liaisons normalisées entre solides, caractéristiques géométriques et repères d'expression privilégiés, paramètres géométriques linéaires et angulaires, symboles normalisés).
B2-12	Proposer un modèle cinématique à partir d'un système réel ou d'une maquette numérique.	Graphe de liaisons. Schéma cinématique.
B2-15	Simplifier un modèle de mécanisme.	Associations de liaisons en série et en parallèle. Liaisons équivalentes (approches cinématique et statique).

C1-04	Proposer une démarche permettant d'obtenir une loi entrée-sortie géométrique. [Info]	Fermetures géométriques.
C2-05	Caractériser le mouvement d'un repère par rapport à un autre repère.	Trajectoire d'un point. Mouvements de translation et de rotation. Mouvement composé.
C2-06	Déterminer les relations entre les grandeurs géométriques ou cinématiques. [Info]	Loi entrée-sortie géométrique. Loi entrée-sortie cinématique. Transmetteurs de puissance (vis-écrou, roue et vis sans fin, trains d'engrenages simples, trains épicycloïdaux, pignon-crémaillère et poulies-courroie).

1. Définitions générales

1.1. Solide indéformable

La distance de deux points d'un **solide indéformable** demeure invariable quelque soit le temps.

Remarquons tout de suite que cette hypothèse ne s'appliquera qu'après une étude de sa compatibilité avec les conditions réelles en rapport avec ce solide : matériaux, géométrie, surface, actions mécaniques, type d'étude,... On ne pourra pas, par exemple, faire l'hypothèse de solide indéformable pour étudier le mouvement d'un pneumatique sur une route accidentée !

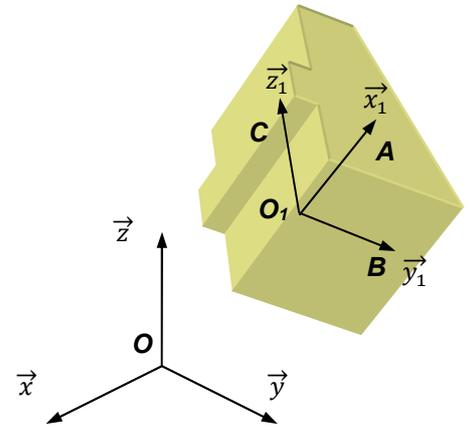
On peut « attacher » un **repère** à un solide indéformable en considérant 4 points non coplanaires liés au solide dont l'un est l'**origine** du repère (ici O_1) et les trois autres les extrémités des vecteurs de la **base** du repère (ici A, B et C).

En mécanique, la base sera orthonormée directe et les vecteurs \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} seront unitaires.

$$\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1$$

Un repère ne suffit pas à définir un mouvement. Il est nécessaire de définir aussi l'instant (la date t) considéré.

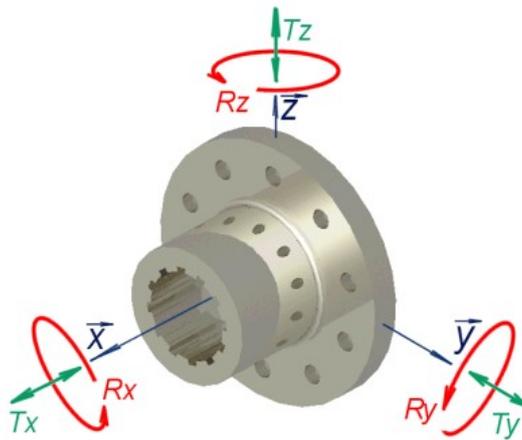
On nomme **référentiel** la combinaison d'un repère et d'une date.



1.2. Degrés de liberté entre solides et paramétrage géométrique

Pour paramétrer un solide, il faut fixer la position de 3 points non alignés liés au solide, c'est-à-dire 9 paramètres. De plus, les 3 points ont une distance constante.

La position d'un solide dans l'espace peut être définie par 6 paramètres indépendants, appelés **degrés de liberté** : 3 rotations (R_x, R_y, R_z) et 3 translations (T_x, T_y, T_z).



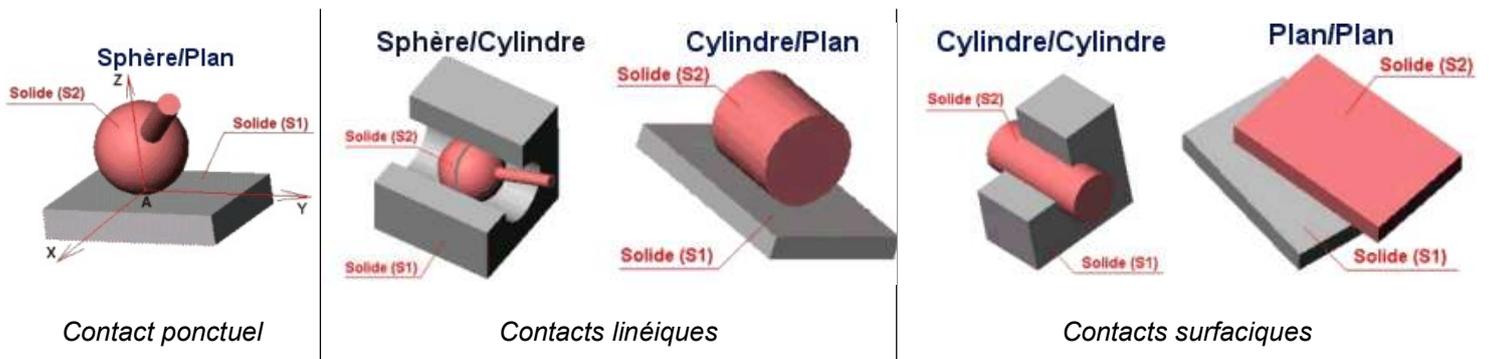
Si entre les solides existe une liaison mécanique, celle-ci va imposer n relations entre $R_x, R_y, R_z, T_x, T_y, T_z$

On dit que S_2 possède alors $6 - n$ degrés de liberté par rapport à S_1 .

Le nombre de degré de liberté entre 2 solides est le nombre de paramètres cinématiques indépendants à définir pour spécifier le torseur cinématique relatif entre ces 2 solides.

Paramétrer la situation d'un solide S_2 par une liaison à n degrés de liberté à un solide S_1 , c'est choisir n paramètres géométriques de situation indépendants qui définiront la situation (**position et orientation**) du repère associé à S_2 par rapport au repère associé à S_1 .

1.3. Contact entre solides



Dans la plupart des systèmes techniques, on tentera de privilégier les contacts surfaciques pour éviter de trop grandes pressions locales qui risqueraient d'endommager les pièces :

- **matage**: déformation plastique de la matière sous l'effet d'un choc ou d'une pression trop élevée
- **rupture**



Ecaillage d'une bague extérieure de roulement à la suite d'un matage

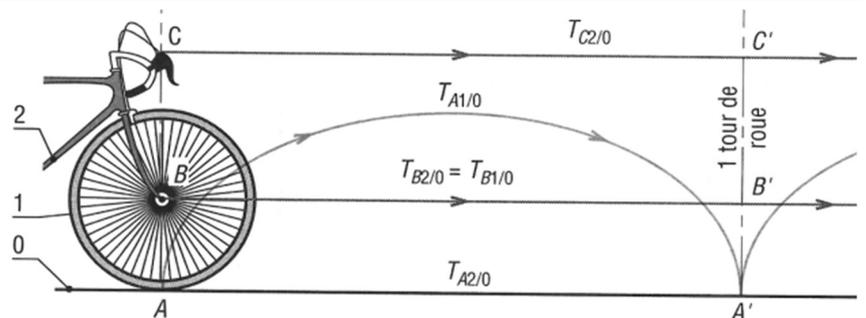
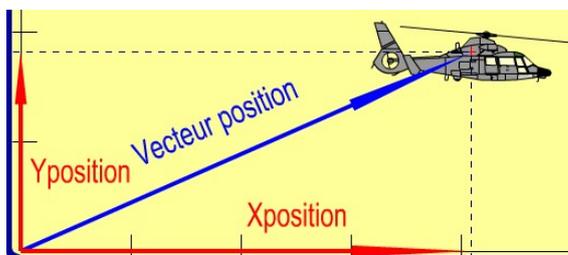
1.4. Cinématique, vecteur position, trajectoire et vecteur vitesse

La **cinématique** est l'étude des mouvements indépendamment des causes de ces mouvements.

Les deux paramètres de la cinématique du point sont la position et le temps.
Le premier est relatif au repère utilisé pour l'exprimer, le second est absolu en mécanique classique.

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de l'espace.

La position d'un point M par rapport à ce repère est donnée par le **vecteur position** \vec{OM} .
Le **vecteur vitesse** d'un point M par rapport à R est la dérivée par rapport au temps du vecteur position défini dans R .
Le **vecteur accélération** d'un point M par rapport à R est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse défini dans R .

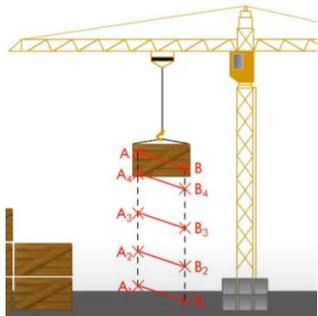


On peut exprimer la position de M en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques par exemple.
Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire du point.

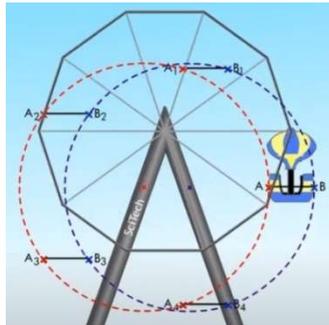
La **trajectoire** est le lieu des positions de M au cours du temps.

2. Mouvements entre solides

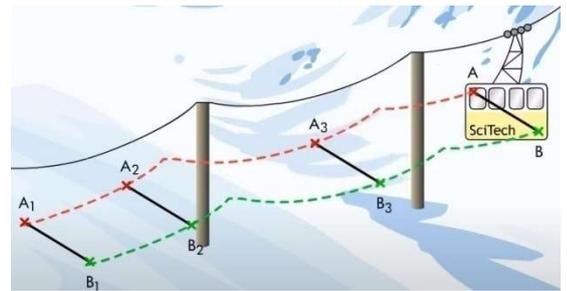
2.1. Mouvement de translation



Translation rectiligne
trajectoire : segment

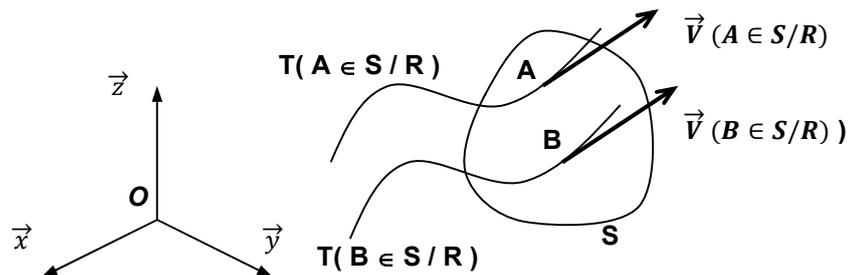


Translation circulaire
trajectoire : cercle



Translation curviligne
trajectoire : quelconque

$$\{V(S/R)\} = \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R) = \vec{0} \\ \vec{V}(A \in S/R) \neq \vec{0} \end{cases}$$



Le mouvement d'un solide (S) par rapport à un repère R est ici un mouvement de **translation (rectiligne, circulaire ou curviligne)**.

Le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ est nul pour tous les points de (S).

Les vecteurs vitesses linéaires, à un instant t, des différents points de (S) par rapport à R sont égaux :

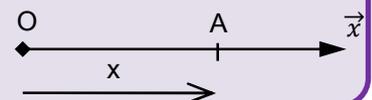
$$\vec{V}(A \in S/R) = \vec{V}(B \in S/R)$$

Les trajectoires des différents points de (S) par rapport à R sont ici identiques.

Une **figure de changement d'origine** (éventuellement de repère) permet de représenter un **paramètre linéaire**.

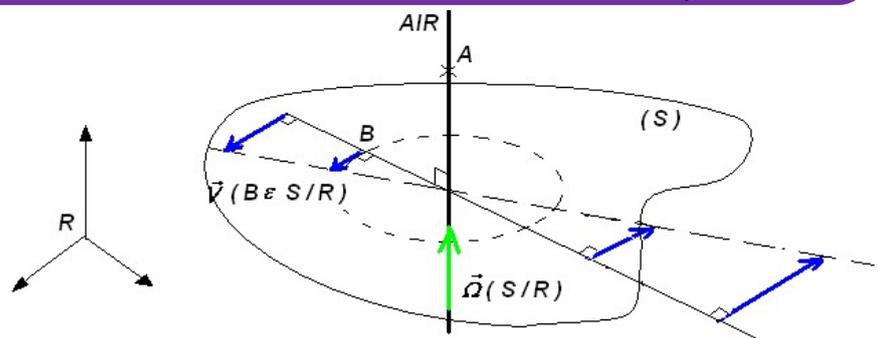
Si deux solides en translation relative suivant x ont pour origines successives O et A,

on a $\vec{OA} = x \vec{x}$, alors : $\vec{V}(A/R) = \dot{x} \vec{x}$ et $\vec{a}(A/R) = \ddot{x} \vec{x}$



2.2. Mouvement de rotation

$$\{V(S/R)\} = \begin{cases} \vec{\Omega}(S/R) \neq \vec{0} \\ \vec{V}(A \in S/R) = \vec{0} \end{cases}$$



Le mouvement d'un solide (S) par rapport à un repère R est ici un mouvement de **rotation** autour d'un axe instantané de rotation (AIR).

Le vecteur taux de rotation $\vec{\Omega}(S/R)$ est le même pour tous les points de (S). Il est de même direction que l'AIR.

Les vecteurs vitesses linéaires, à un instant t, des différents points A de (S) par rapport à R sont nuls :

$$\vec{V}(A \in S/R) = \vec{0}$$

Les vecteurs vitesses linéaires, à un instant t, des différents points B de (S) par rapport à R :

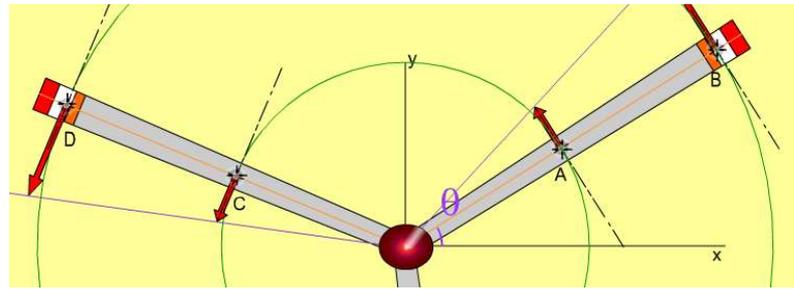
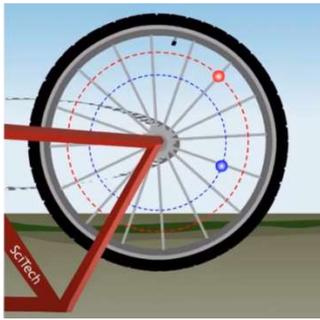
$$\vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$$

Les trajectoires des différents points de (S) par rapport à R sont ici des cercles de rayons différents, dont les centres A se situent sur l'AIR.

Si on s'intéresse uniquement à la **norme de cette vitesse**, on a alors :
ou plus simplement :

$$V(B \in S/R) = BA \cdot \omega (S/R)$$

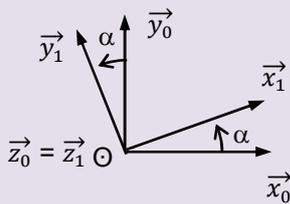
$$V = R \cdot \omega$$



Une **figure de changement de base** permet de représenter un **paramètre angulaire**.

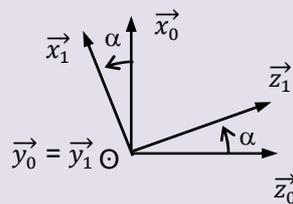
$\vec{\Omega} (B_1/B_0)$ est appelé le **vecteur instantané de rotation** (ou **taux de rotation**) de la base B_1 par rapport à la base B_0 .

$$\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$$



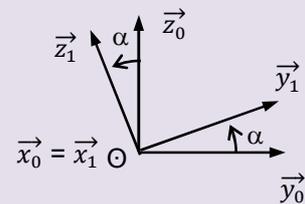
$$\vec{\Omega} (B_1/B_0) = \dot{\alpha} \vec{z}_0$$

$$\alpha = (\vec{z}_0, \vec{z}_1) = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$$



$$\vec{\Omega} (B_1/B_0) = \dot{\alpha} \vec{y}_0$$

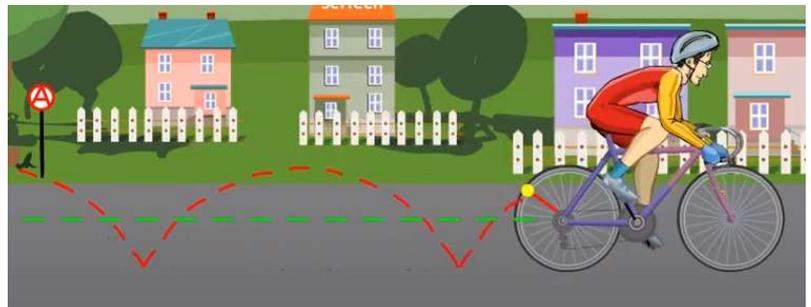
$$\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$$



$$\vec{\Omega} (B_1/B_0) = \dot{\alpha} \vec{x}_0$$

2.3. Mouvement combiné ou complexe

Le mouvement d'un solide (S) par rapport à un repère R est ici un **mouvement combiné (ou complexe)**, obtenu par la composition de mouvements de translation(s) et/ou de rotation(s).



3. Liaisons entre solides

3.1. Liaisons réelles et parfaites entre solides

L'étude des liaisons réelles existantes entre les différentes pièces d'un mécanisme est délicate et difficile. En effet, les défauts entre les surfaces de contact (rugosité, défaut de forme), la présence de jeu, la déformation des pièces, les frottements, et l'usure écartent le modèle théorique de la liaison de la réalité.

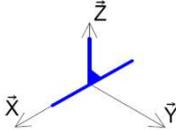
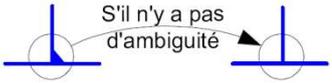
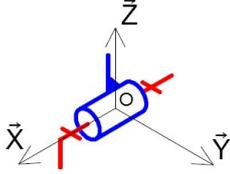
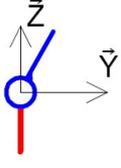
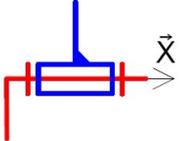
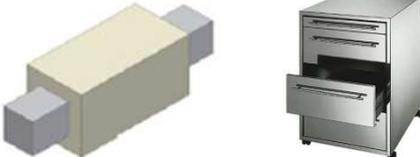
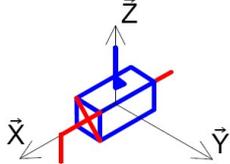
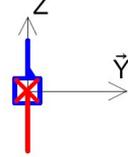
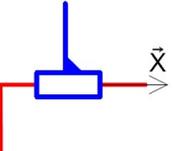
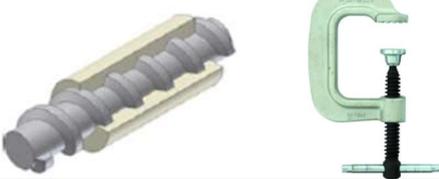
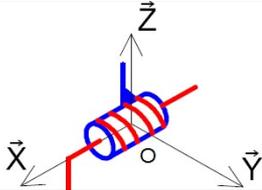
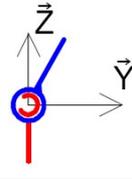
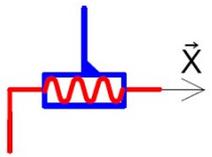
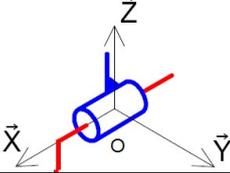
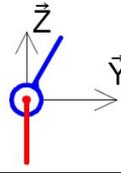
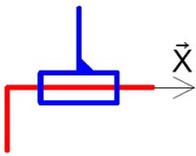
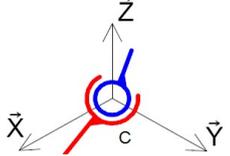
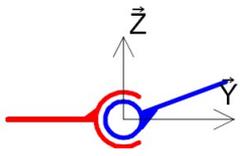
Afin de pouvoir étudier le fonctionnement d'un mécanisme, il est nécessaire de modéliser les liaisons entre les différentes pièces.

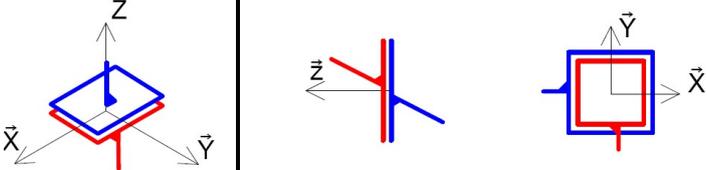
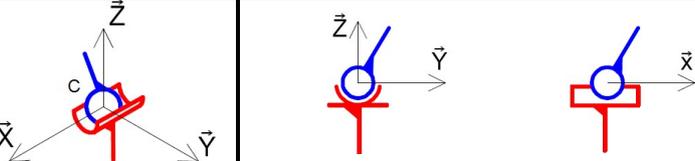
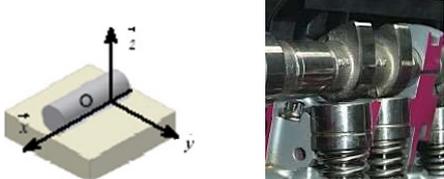
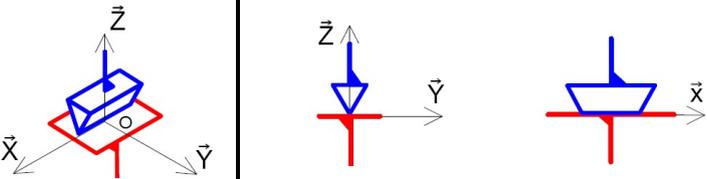
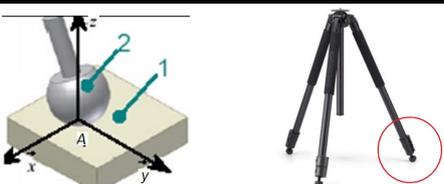
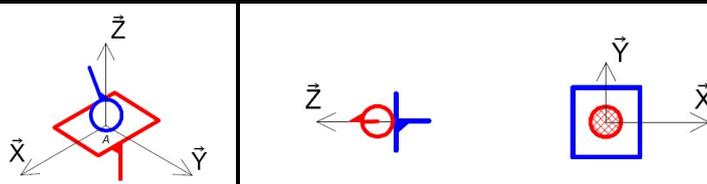
Une **liaison** est dite **parfaite** si :

- le contact s'établit sans frottement
- les surfaces de contact sont supposées géométriquement parfaites
- la liaison est sans jeu

3.2. Liaisons normalisées entre solides

La norme NF E04-015 présente les douze liaisons élémentaires.

<p>Liaison encastrement</p> <p>0 Degré de liberté</p>	<p>Le torseur cinématique est nul en tout point P de l'espace.</p>		
			
<p>Liaison pivot d'axe (O, x)</p> <p>1 Degré de liberté : Rx</p>	$\{V(2/1)\} =_{VP \in (O, \vec{x})} \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$		
			
<p>Liaison glissière de direction x</p> <p>1 Degré de liberté : Tx</p>	$\{V(2/1)\} =_{VP} \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ V_x \vec{x} \end{Bmatrix}$		
			
<p>Liaison hélicoïdale d'axe (O, x)</p> <p>1 Degré de liberté : Tx et Rx dépendants</p>	$\{V(2/1)\} =_{VP \in (O, \vec{x})} \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} \\ V_x \vec{x} \end{Bmatrix}$		$ V_x = \frac{p}{2\pi} \omega_x $
			
<p>Liaison pivot glissant d'axe (O, x)</p> <p>2 Degrés de liberté : Tx, Rx</p>	$\{V(2/1)\} =_{VP \in (O, \vec{x})} \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} \\ V_x \vec{x} \end{Bmatrix}$		
			
<p>Liaison sphérique (anciennement rotule) de centre C</p> <p>3 Degrés de liberté : Rx, Ry, Rz</p>	$\{V(2/1)\} =_C \begin{Bmatrix} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$		
			

<p>Liaison appui plan de normale \vec{z}</p> <p>3 Degrés de liberté : Rz, Tx, Ty</p>	$\{V(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{array} \right\}_{VP}$
	
<p>Liaison sphérique à doigt (anc. rotule à doigt) d'axes (C, \vec{y}) et (C, \vec{z})</p> <p>2 Degrés de liberté : Ry, Rz</p>	$\{V(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$
	
<p>Liaison sphère cylindre (anc. linéaire annulaire) de centre C et de direction \vec{x}</p> <p>4 Degrés de liberté : Rx, Ry, Rz, Tx</p>	$\{V(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} \end{array} \right\}_C$
	
<p>Liaison linéaire rectiligne d'axe (O, \vec{x}) et de normale \vec{z}</p> <p>4 Degrés de liberté : Rx, Rz, Tx, Ty</p>	$\{V(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \vec{x} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{array} \right\}_{VP \in (O, \vec{x})}$
	
<p>Liaison sphère-plan (anciennement ponctuelle) de centre A et de normale \vec{z}</p> <p>5 Degrés de liberté : Rx, Ry, Rz, Tx, Ty</p>	$\{V(2/1)\} = \left\{ \begin{array}{l} \omega_x \vec{x} + \omega_y \vec{y} + \omega_z \vec{z} \\ V_x \vec{x} + V_y \vec{y} \end{array} \right\}_A$
	
<p>Liaison libre</p> <p>6 Degrés de liberté : Rx, Ry, Rz, Tx, Ty, Tz</p>	<p>Le torseur cinématique comporte 6 paramètres indépendants non nuls en tout point P de l'espace.</p>

4. Mécanismes

Un mécanisme étant un ensemble de solides et de liaisons organisé, il est indispensable d'en faire une analyse et une représentation logique, conforme à sa structure : son graphe des liaisons puis son schéma cinématique.

4.1. Graphe des liaisons

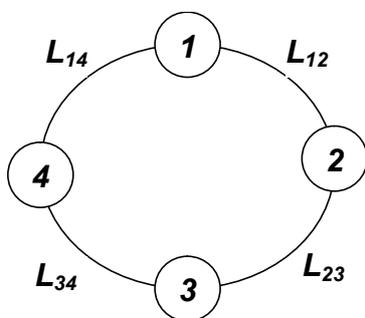
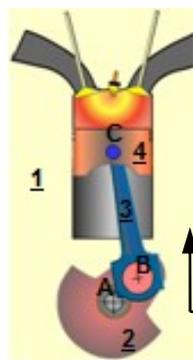
On appelle **classe d'équivalence cinématique** (ou groupe cinématiquement lié) un ensemble de solides liés par encastrement. Par conséquent, cet ensemble sera également représenté par un seul solide.

Ces regroupements s'opèrent à partir du dessin d'ensemble ou du système réel. Les éléments intermédiaires (roulements...) ou les éléments déformables (ressorts...) n'y apparaîtront pas. Il est vivement conseillé d'utiliser une couleur différente pour chaque groupe cinématiquement lié.

On appelle **graphe des liaisons** (ou graphe de structure), une représentation plane qui permet de décrire l'agencement des liaisons entre les solides constituant le mécanisme.

Ces liaisons seront déterminées en examinant les surfaces de contact, et donc les mouvements relatifs possibles, entre les solides.

Exemple : Moteur 4 temps (4 classes d'équivalence : corps 1, vilebrequin 2, bielle 3, piston 4)



L_{12} : liaison pivot d'axe (A, \vec{z})

L_{23} : liaison pivot d'axe (B, \vec{z})

L_{34} : liaison pivot d'axe (C, \vec{z})

L_{14} : liaison pivot glissant d'axe (C, \vec{y})

4.2. Schéma cinématique

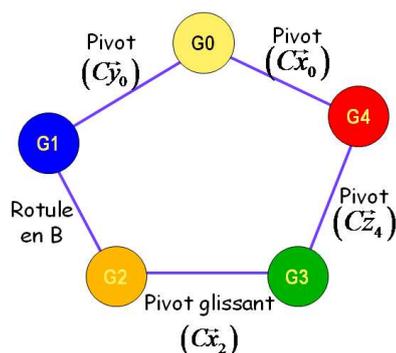
On appelle **schéma cinématique** d'un mécanisme, une représentation géométrique simplifiée des pièces et des liaisons qui le constituent et qui fait apparaître clairement sa cinématique.

- mettre en place dans un repère lié au bâti, les points et les axes particuliers des différentes liaisons du mécanisme étudié.
- dessiner séparément chaque liaison entre les classes d'équivalence.
- relier par des traits les différents éléments d'une même classe d'équivalence.
- mettre en place les repères et le paramétrage nécessaires.

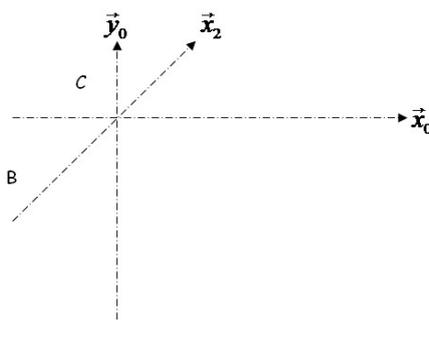


Exemple : Sinusmatic

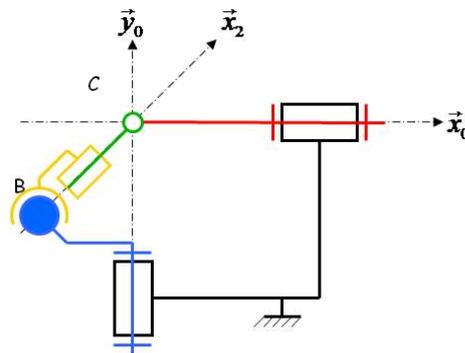
Graphe des liaisons



Points et axes nécessaires



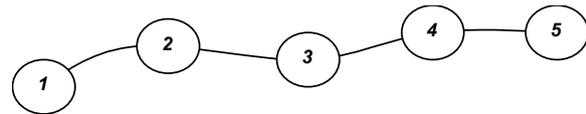
Liaisons normalisées orientées



4.3. Chaîne de solides

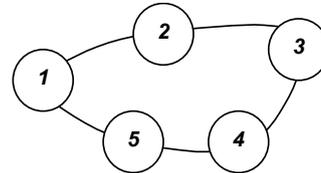
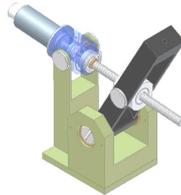
✓ **Chaîne ouverte** : une chaîne de solides S_1, S_2, \dots, S_n est ouverte si les solides extrêmes sont différents.

Exemple : robot Ericc3



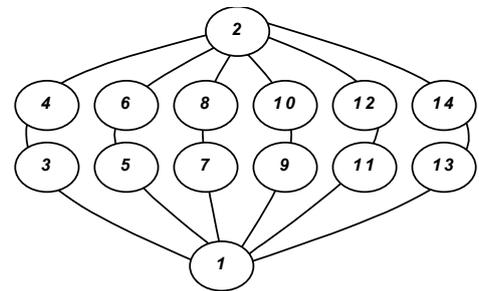
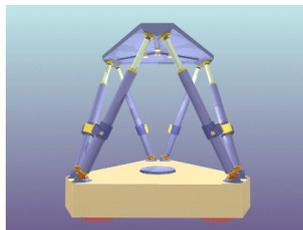
✓ **Chaîne fermée** : une chaîne de solides S_1, S_2, \dots, S_n est fermée si les solides extrêmes sont identiques.

Exemple : maquette Maxpid



✓ **Chaîne complexe** : une chaîne de solides S_1, S_2, \dots, S_n est complexe si elle comporte plusieurs chaînes ouvertes ou fermées.

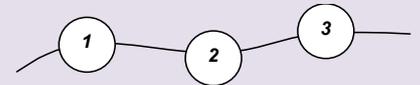
Exemple : Plate-forme Stewart



4.4. Liaison cinématiquement équivalente

✓ **Liaison en série**

On dira que 3 solides sont en **liaison série** si la chaîne de solides est de la forme :

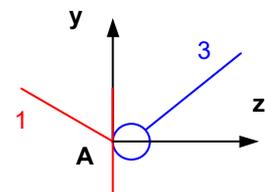
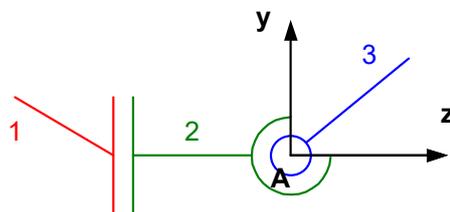


On écrit les torseurs cinématiques $\{V(2/1)\}$ et $\{V(3/2)\}$ associés aux liaisons $S_1 - S_2$ et $S_2 - S_3$.

La relation de composition de mouvement nous permet d'écrire le torseur cinématique associé à la liaison virtuelle cinématiquement équivalente entre $S_1 - S_3$.

$$\{V(3/1)\} = \{V(3/2)\} + \{V(2/1)\}$$

Exemple : patin à rotule



Liaison appui plan de normale \vec{z}

$$\{V(1/2)\}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 & V_{X1} \\ 0 & V_{Y1} \\ \omega_{Z1} & 0 \end{Bmatrix}_R$$

ETAPE 1

+

Liaison sphérique de centre A

$$\{V(2/3)\}$$

$$\begin{Bmatrix} \omega_{X2} & 0 \\ \omega_{Y2} & 0 \\ \omega_{Z2} & 0 \end{Bmatrix}_R$$

ETAPE 1

+

ETAPE 3

Liaison sphère-plan de centre A et de normale \vec{z}

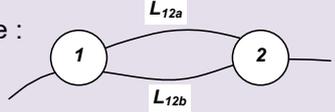
$$= \{V(1/3)\}$$

$$= \begin{Bmatrix} \omega_X & V_X \\ \omega_Y & V_Y \\ \omega_Z & 0 \end{Bmatrix}_R$$

ETAPE 2

✓ **Liaison en parallèle**

On dira que 2 solides 1 et 2 ont 2 liaisons en parallèle si la chaîne de solides est de la forme :



On écrit les torseurs cinématiques $\{V_a(2/1)\}$ et $\{V_b(2/1)\}$ associés aux liaisons L_{12a} et L_{12b} entre 1 et 2.

On recherche le torseur $\{V_{eq}(2/1)\}$ équivalent à cette association.

Or, il n'existe qu'un seul torseur cinématique associé au mouvement relatif de 2 solides. Les 3 torseurs précédents sont donc égaux, calculés en un même point.

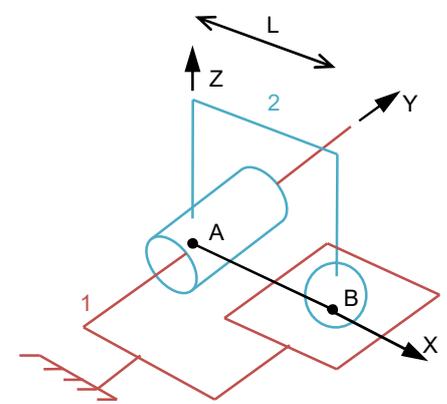
$$\{V_a(2/1)\} = \{V_b(2/1)\} = \{V_{eq}(2/1)\}$$

Exemple :

liaison L_{12} : pivot glissant d'axe (A, \vec{y}) : $\{V(1/2)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_Y & V_Y \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$

liaison L'_{12} : sphère-plan de normale (B, \vec{z}) : $\{V'(1/2)\} = \begin{Bmatrix} \omega_{X'} & V_{X'} \\ \omega_{Y'} & V_{Y'} \\ \omega_{Z'} & V_{Z'} \end{Bmatrix}_B$

liaison L_{12eq} : inconnue $\{V_{eq}(1/2)\} = \begin{Bmatrix} \omega_X & V_X \\ \omega_Y & V_Y \\ \omega_Z & V_Z \end{Bmatrix}_B$



4.5. Analyse géométrique d'une fermeture de chaîne

On appelle **loi d'entrée – sortie** la relation qui lie le paramètre d'entrée au paramètre de sortie.

✓ **Positions relatives**

En présence d'une chaîne fermée de solides, on peut écrire une relation vectorielle de **fermeture géométrique** de chaîne qui passe par des points O_i des solides :

$$\vec{O_0O_1} + \vec{O_1O_2} + \dots + \vec{O_nO_0} = \vec{0}$$

En projetant judicieusement cette relation vectorielle, on peut obtenir 3 relations scalaires dans le cas d'un mécanisme spatial (2 dans le cas d'un mécanisme plan).

✓ **Orientations relatives**

On étudie les orientations relatives des vecteurs de base des repères liés aux solides.

Dans le cas d'un mécanisme plan, on peut écrire une relation du type :

$$\vec{x}_0, \vec{x}_1 + \vec{x}_1, \vec{x}_2 + \dots + \vec{x}_n, \vec{x}_0 = \vec{0}$$

Dans le cas d'un mécanisme spatial, on obtient une relation en traduisant le fait qu'une liaison impose un angle constant (souvent droit) entre 2 vecteurs de base liés à 2 solides. On peut alors écrire une relation du type :

$$\vec{x}_i \cdot \vec{x}_j = 0$$

4.6. Analyse cinématique d'une fermeture de chaîne

En présence d'une chaîne fermée de n solides, on peut appliquer la loi de composition des mouvements.

$$\{V(1/2)\} + \{V(2/3)\} + \dots + \{V(n/1)\} = \{0\}$$

Cette relation torsorielle permet d'écrire 2 relations vectorielles et 6 relations scalaires dans le cas d'un mécanisme spatial.

5. Cinématique des trains d'engrenage

5.1. Introduction sur les engrenages

Les engrenages sont des composants mécaniques essentiels. Ils font partie des systèmes de transmission de mouvement et de puissance les plus utilisés, les plus résistants et les plus durables.



Engrenage avec **roue** (grande) et **pignon** (petit)



Engrenage avec **couronne** (roue à denture intérieure) et pignon

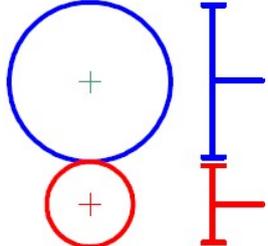
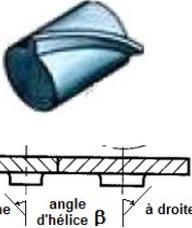
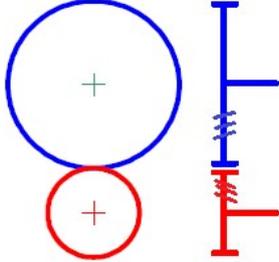
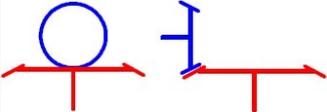
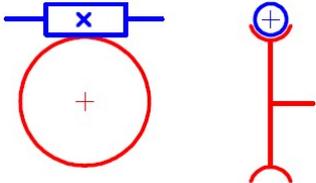


Pignon – **Crémaillère** (secteur denté linéaire)

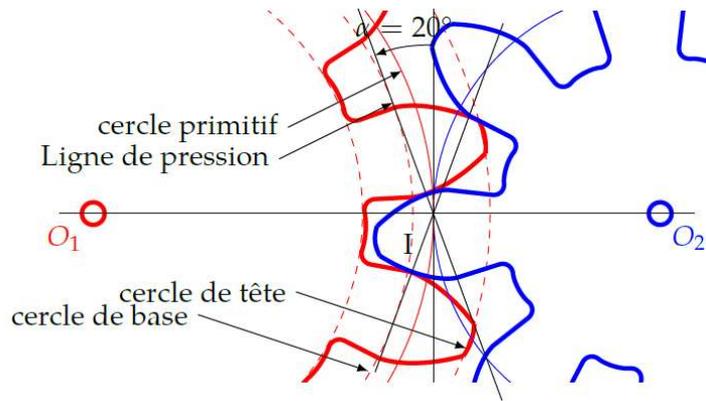
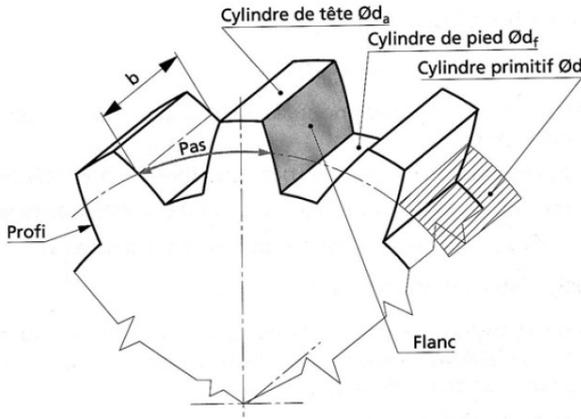


Train d'engrenages

5.2. Différents types d'engrenages

Types d'engrenages	Transmissions	Avantages / Inconvénients	Schéma normalisé
Engrenage droit à denture droite 	arbres parallèles 	<ul style="list-style-type: none"> - les + simples et les + économiques - efforts radiaux peuvent être importants - rendement élevé (95 à 99%) - ne supportent pas les efforts axiaux - bruits, vibrations - rapport d'engrenage limité (environ 7) 	
Engrenage droit à denture hélicoïdale 	arbres parallèles 	<ul style="list-style-type: none"> - peuvent supporter efforts axiaux - ils sont + performants que les précédents à taille égale, pour transmettre puissance et couple - + silencieux, - de vibrations - rapport d'engrenage limité (environ 7) - engendrent des efforts axiaux 	
Engrenage conique 	arbres concourants, généralement perpendiculaires 	<ul style="list-style-type: none"> - réglage précis - engendrent des efforts axiaux et radiaux parfois importants 	
Roue et vis sans fin 	arbres perpendiculaires	<ul style="list-style-type: none"> - grand rapport de réduction (jusque 100) - irréversibilité possible (sécurité anti-retour) - engendrent des efforts axiaux et radiaux importants - rendement faible (40 à 70 %) 	

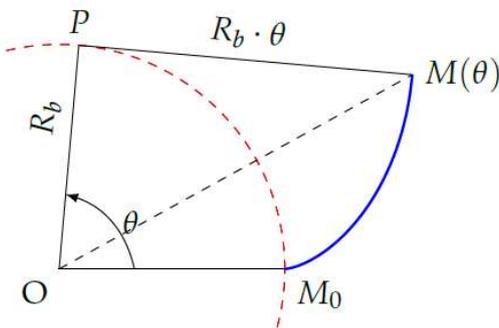
5.3. Caractéristiques principales des engrenages droits à denture droite



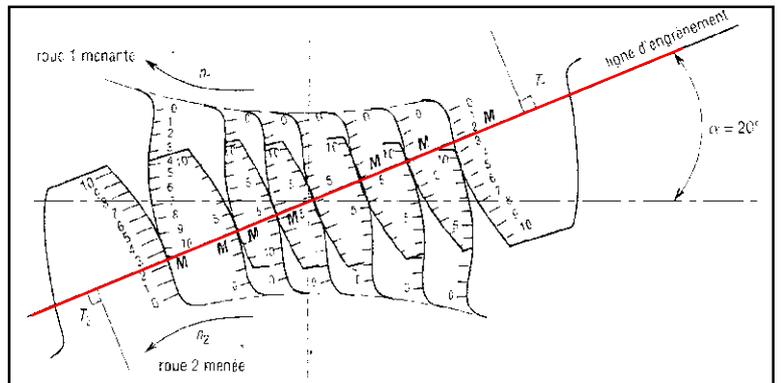
L'ensemble de la géométrie d'une roue dentée peut être défini à l'aide du module.

Caractéristiques géométriques	Symboles ISO	Observations
Module	m (mm)	$m_1 = m_2$ (valeurs normalisées)
Nombre de dents	Z	Z_1 et Z_2
Diamètre primitif	d (mm)	$d_1 = m Z_1$ $d_2 = m Z_2$
Pas primitif	p (mm)	$p_1 = p_2 = \pi m$
Entraxe entre les 2 roues	a (mm)	$a = 0.5 (d_1 + d_2) = 0.5 m (Z_1 + Z_2)$

L'engrènement entre les deux roues dentées nécessite que les profils des dents soient conjugués, c'est à dire des profils capables de rouler l'un sur l'autre. Les profils conjugués les plus utilisés sont des **développantes de cercle**. Cette développante est construite en faisant rouler une droite sur le cercle de base.



Profil en développante de cercle



Ligne de pression

La **ligne de pression** (ou ligne d'engrènement) est la ligne tangente aux deux cercles de base, elle porte en permanence l'effort de contact s'exerçant sur les roues. Le point de contact M entre les dents est toujours situé sur cette ligne. Les deux cercles primitifs sont tangents en I.

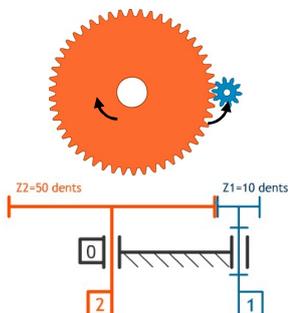
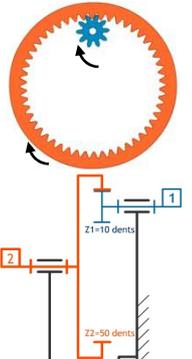
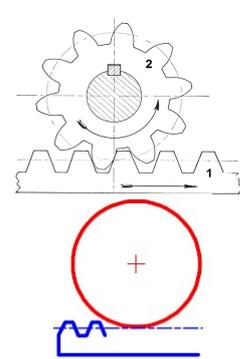
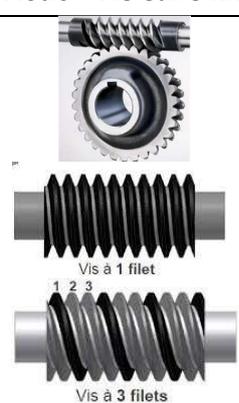
On peut écrire que la roue dentée 2 roule sans glisser sur la roue dentée 1 en I :

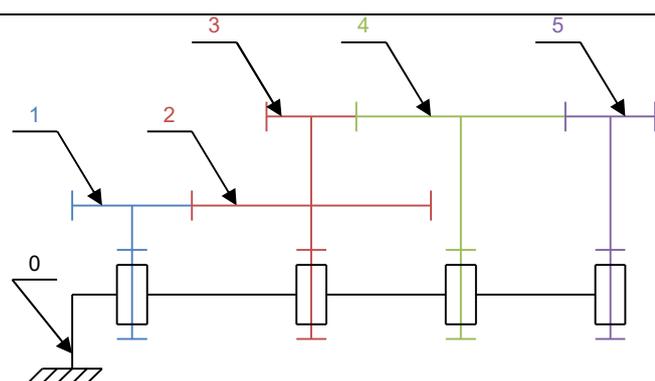
$$\vec{V}(I \in 2/1) = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}(I \in 2/1) &= \vec{0} = \vec{V}(I \in 2/0) - \vec{V}(I \in 1/0) \\ \vec{0} &= \vec{V}(O_2 \in 2/0) + \vec{IO}_2 \wedge \vec{\Omega}(2/0) - \vec{V}(O_1 \in 1/0) - \vec{IO}_1 \wedge \vec{\Omega}(1/0) \\ \vec{0} &= \vec{0} + R_2 \vec{y}_0 \wedge \omega_{20} \vec{z}_0 - \vec{0} + R_1 \vec{y}_0 \wedge \omega_{10} \vec{z}_0 \\ \vec{0} &= R_2 \omega_{20} \vec{x}_0 + R_1 \omega_{10} \vec{x}_0 \end{aligned}$$

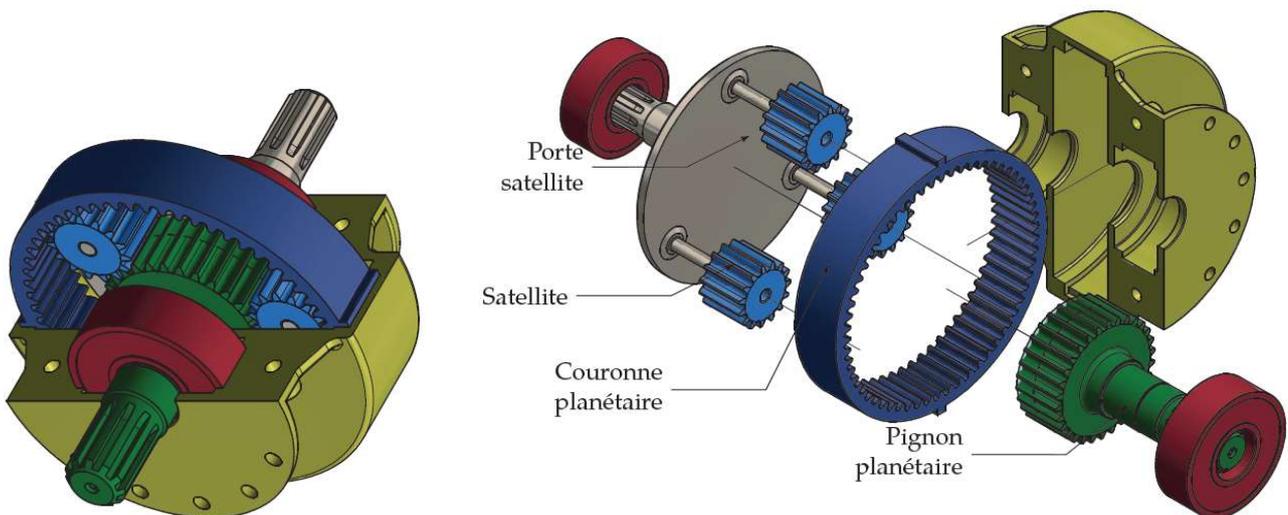
$$\frac{R_2}{R_1} = - \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}}$$

Caractéristiques cinématiques	Définitions	Observations
Rapport d'engrenage u	$u = \frac{Z_{roue}}{Z_{pignon}} = \frac{d_{roue}}{d_{pignon}}$	$u \geq 1$
Rapport de transmission (ou raison) i	$i = \frac{\omega(\text{initial}/0)}{\omega(\text{final}/0)}$	-1 < i < 1 : rapport de multiplication $i < -1$ ou $1 < i$: rapport de réduction

Engrenage extérieur	Engrenage intérieur	Pignon – crémaillère	Roue - Vis sans fin
			
$\frac{\theta_{10}}{\theta_{20}} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = -\frac{d_2}{d_1} = -\frac{Z_2}{Z_1}$	$\frac{\theta_{10}}{\theta_{20}} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{Z_2}{Z_1}$	$X_{10} = R_2 \cdot \theta_{20}$ $V_{10} = R_2 \cdot \omega_{20}$	$\frac{\theta_{10}}{\theta_{20}} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{\text{nombre filets}}{Z_1}$

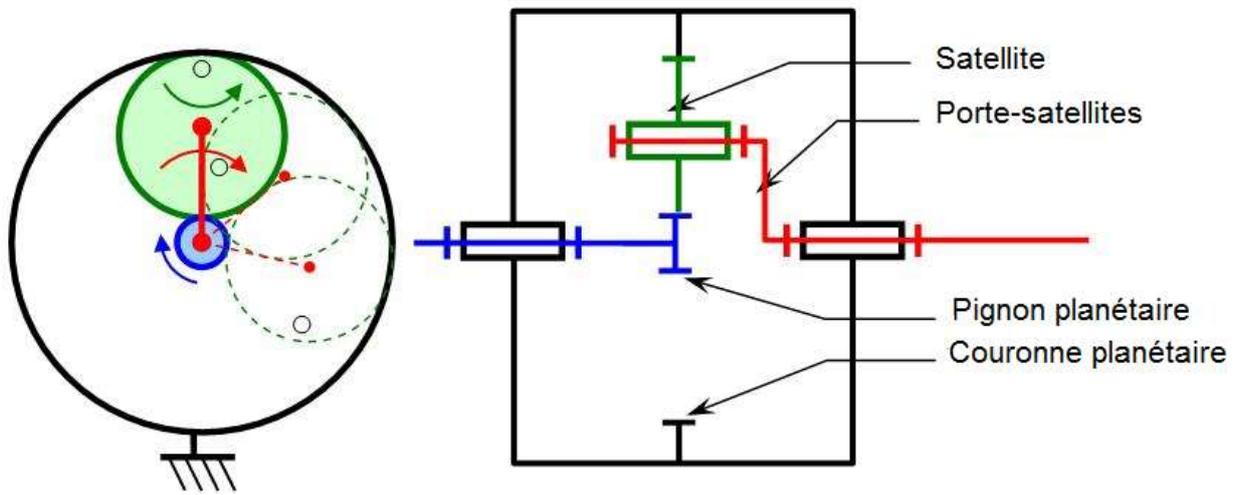
Train d'engrenages classique	
	$\frac{\omega(\text{roue initiale}/0)}{\omega(\text{roue finale}/0)} = (-1)^n \frac{\text{produit } Z \text{ roues menées}}{\text{produit } Z \text{ roues menantes}}$ <p>n : nombre d'engrènements extérieurs</p>

5.4. Réducteurs à trains épicycloïdaux

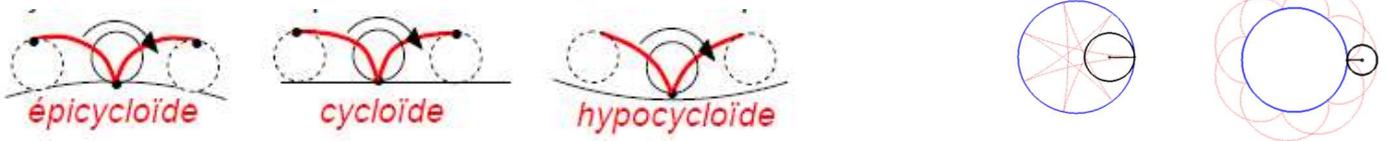


Un **train épicycloïdal** est un train d'engrenages comportant des satellites.

- **satellite** (sat) : roue dentée dont l'axe de la liaison pivot est mobile par rapport au bâti
- **porte-satellites** (psat) : solide (pas roue dentée) en liaison pivot avec le satellite
- **planétaire** (p) : roue dentée dont l'axe de la liaison pivot est fixe par rapport au bâti

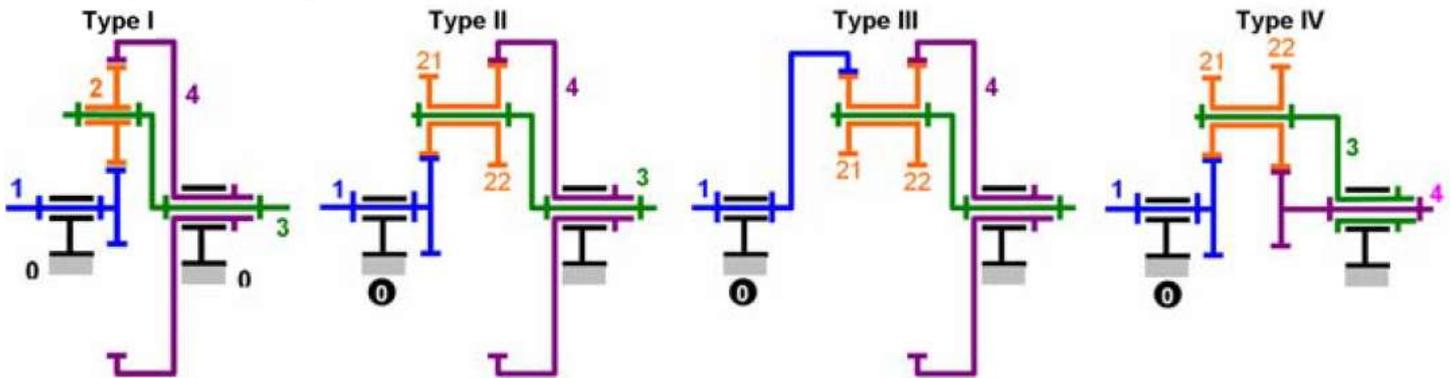


Les trajectoires des points des satellites suivent une épicycloïde, car le mouvement des satellites par rapport au bâti est une combinaison de 2 rotations (satellite/porte-satellite et porte-satellite/bâti).



✓ **Approche structurelle**

Il existe 4 types de montage de train épicycloïdal, numérotés ici de I à IV.



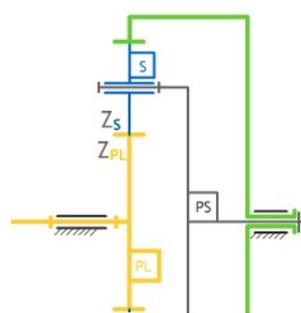
Ces montages peuvent être plans (exemple : réducteur de roue) ou sphériques (exemple : différentiel de voiture). Les satellites peuvent être simples ou doubles.



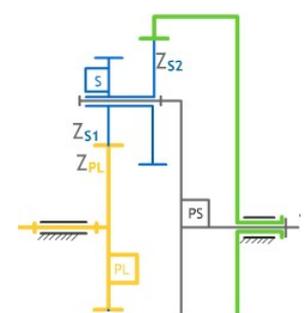
Train épicycloïdal plan



Train épicycloïdal sphérique



Satellite simple



Satellite double

✓ **Rapport de transmission**

Pour déterminer le rapport de transmission d'un train épicycloïdal :

- on recherche le bâti, les roues dentées (planétaires et satellites) et le porte-satellites,
- on utilise la formule du train d'engrenages classique, en modifiant le référentiel « bâti » en « porte-satellites »,
- on introduit le bâti à l'aide d'une composition des vitesses,
- on isole le rapport de transmission désiré.

La **formule de Willis** nous donne la **raison basique** r_b du train épicycloïdal. Elle s'écrit :

$$r_b = \frac{\omega(\text{planétaire } p1/psat)}{\omega(\text{planétaire } p2/psat)} = (-1)^n \frac{Z_{p2} \cdot Z_{sat \text{ engrenant avec } p1}}{Z_{sat \text{ engrenant avec } p2} \cdot Z_{p1}}$$

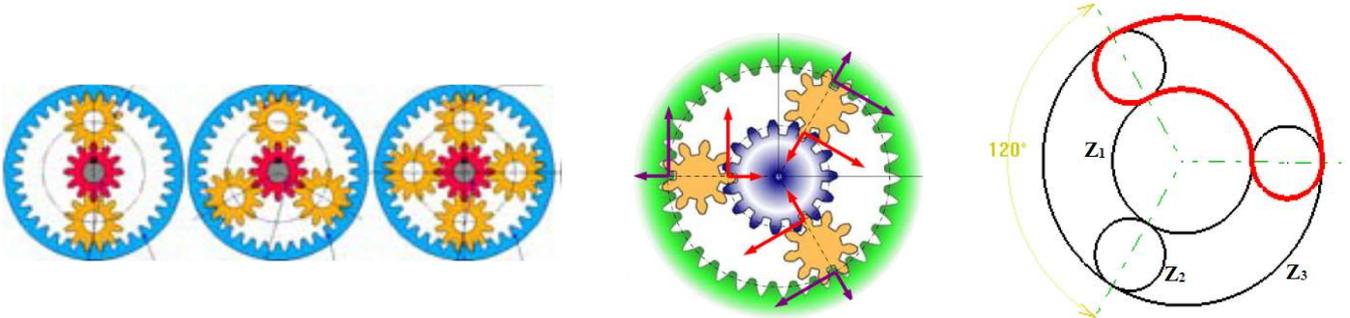
avec n : nombre d'engrèvements extérieurs

✓ **Condition de montage : « Règle du haricot »**

Le nombre de satellites n'influe pas sur le rapport de transmission.

Par rapport à des trains classiques, la puissance est transmise en parallèle et non en série. Les composants sont donc moins sollicités et dimensionnés en conséquence, donc moins volumineux et moins lourds.

Les efforts radiaux des satellites se compensent également. Les éléments de guidage sont alors moins sollicités.



Pour répartir la puissance à transmettre et éviter un déséquilibre des masses, on prévoit sur un même porte-satellites un montage de n_{sat} ($n_{sat} = 3$ souvent) satellites formant le même angle entre eux de $2\pi / n_{sat}$.

Afin que les satellites (2) puissent engrèner en même temps avec la couronne (3) et avec le planétaire d'entrée (1), le nombre de dents comptées sur le contour en forme de haricot de la figure ci-dessus doit être entier.

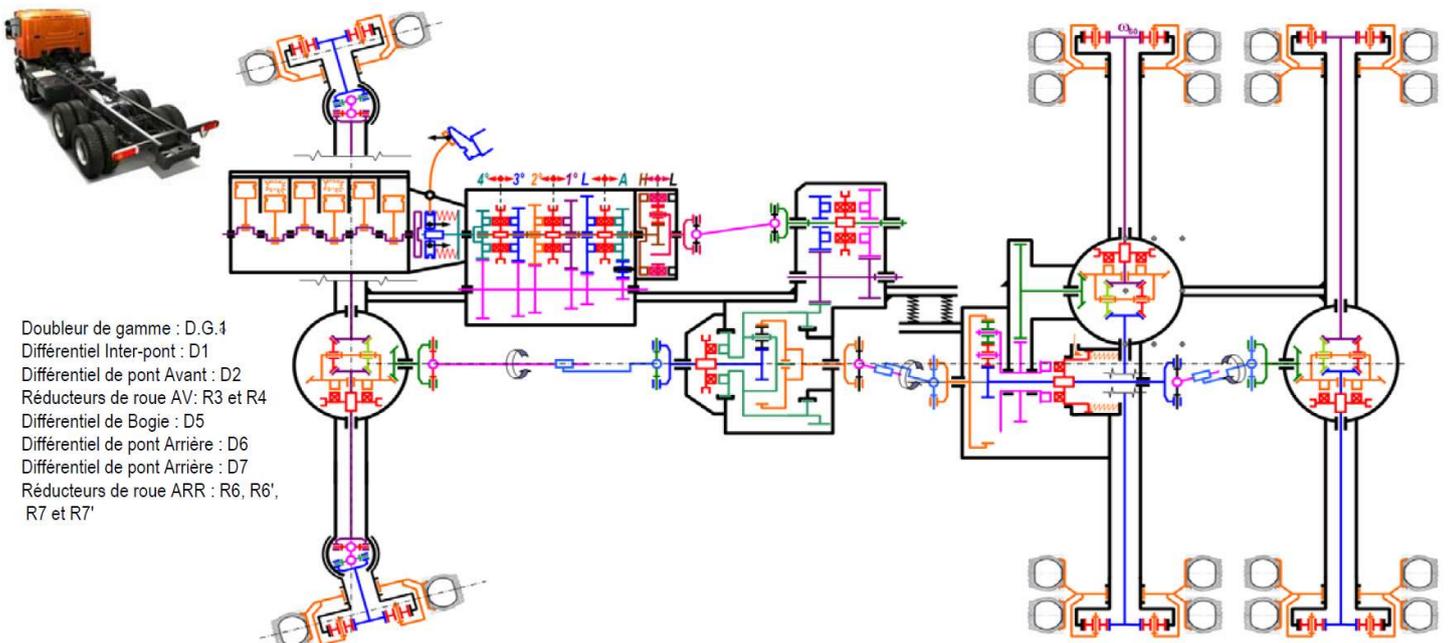
$$(Z_1 + Z_3) / n_{sat} = \text{nombre entier}$$

✓ **Condition géométrique liée aux entraxes :**

Sur l'exemple précédent, cette condition géométrique est :

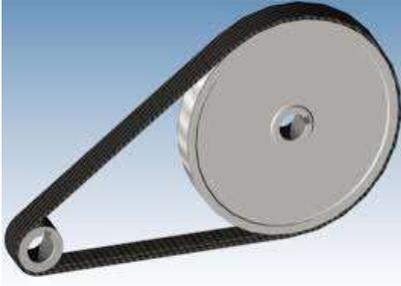
$$R_1 + 2 R_2 = R_3$$

Exemple : implantation de 12 trains épicycloïdaux dans une transmission intégrale de camion de chantier



6. Cinématique des transmissions par lien flexible

Système poulie – courroie lisse



Glissement
Transmission de couples faibles
Silencieux
Economique
Inadapté aux hautes températures

Système poulie – courroie crantée

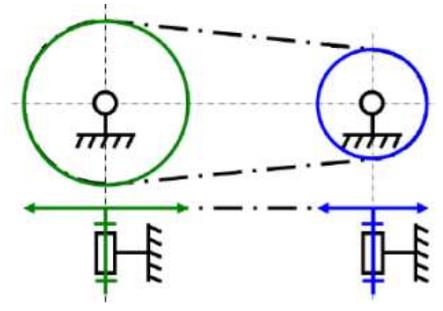
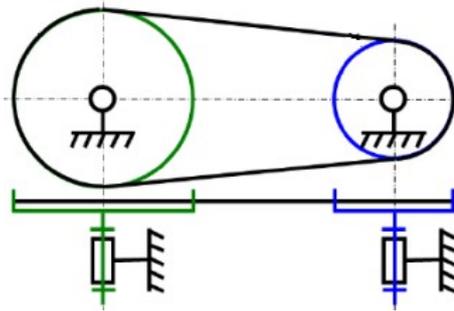


Aucun glissement
Transmission de couples élevés
Silencieux
Inadapté aux hautes températures

Système pignon chaîne



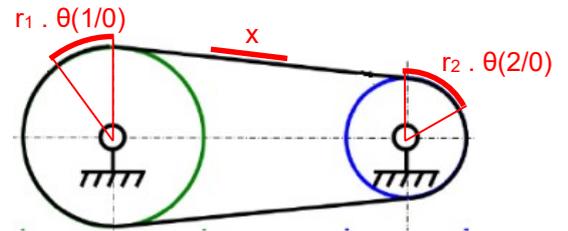
Aucun glissement
Transmission de couples très élevés
Bruyant
Lubrification nécessaire
Coûteux



La loi d'entrée-sortie de ces transmetteurs de puissance est :

$$\frac{\theta_{10}}{\theta_{20}} = \frac{\omega_{10}}{\omega_{20}} = \frac{d_2}{d_1}$$

En effet, la longueur du segment de courroie translaté x est égale aux longueurs des arcs parcourus sur les poulies.



7. Cinématique des systèmes vis – écrou

Un système vis-écrou permet de transformer un mouvement de rotation d'une vis en une translation d'un écrou. Ce système est généralement irréversible: la translation de l'écrou n'entraînera pas la rotation de la vis.

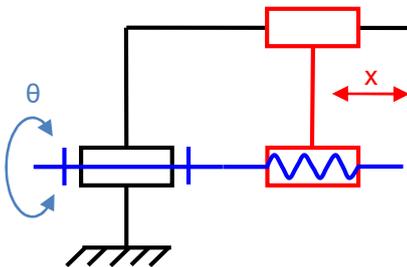
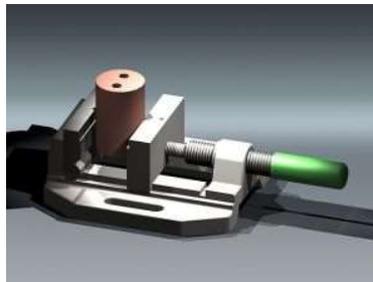


Schéma cinématique d'un système vis-écrou



Etou



Tube de colle

La loi d'entrée-sortie de ce transmetteur de puissance est fonction du pas « p » de la vis. Le **pas de la vis** est la translation parcourue par la vis par rapport à son écrou pour un tour de vis.

Translation X [mm]	Rotation θ [rad]
p	2π

$$X = \frac{p}{2\pi} \theta \quad \text{ou} \quad V = \frac{p}{2\pi} \omega$$