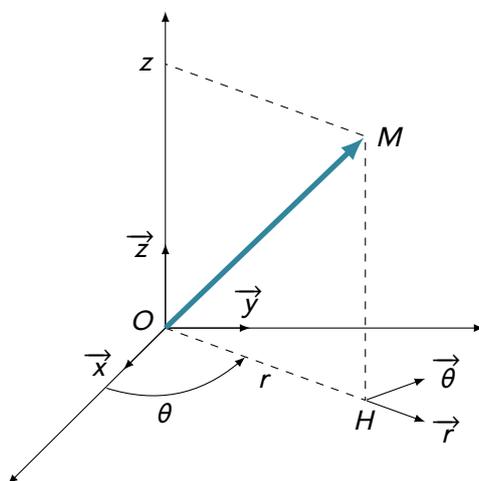


Cinématique

Concepts en cinématique Correction



2024 - 2025
PCSI1
Lycée Henri Loritz



Table des matières

1	Vecteur	2
	1.1 Définition	2
	1.2 Règles de calculs	2
2	Base, repère, référentiel	2
3	Systèmes de coordonnées	3
4	Produit scalaire	3



1 VECTEUR

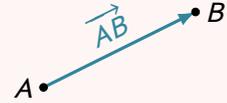
1.1 DÉFINITION

🔗 Définition

Soit $(A; B)$ un couple de points de l'espace. Ce couple définit :

- une direction (celle de la droite (AB));
- un sens (de A vers B);
- une longueur (la longueur du segment $[AB]$).

On associe à un tel couple un objet appelé **vecteur**, noté \vec{AB} .



💬 Remarque

La norme du vecteur \vec{AB} , notée $\|\vec{AB}\|$ est égale à la longueur du segment $[AB]$.

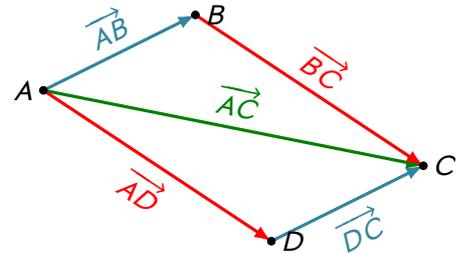
Si la norme du vecteur \vec{AB} est nulle, alors le vecteur est le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

1.2 RÈGLES DE CALCULS

♥️ A retenir

Soient \vec{AB} et \vec{AD} deux vecteurs. On définit $\vec{AB} + \vec{AD}$ comme le vecteur \vec{AC} tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme. Ce vecteur $\vec{AB} + \vec{AD}$ ne dépend pas du choix du point A .

Une conséquence essentielle de cette définition de l'addition de vecteurs est la **relation de Chasles** $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.



2 BASE, REPÈRE, RÉFÉRENTIEL

🔗 Définition

Un **repère** est l'association d'un point et d'une base. Le point est l'origine du repère. La base sera à trois dimensions.

Sur l'exemple de droite, l'origine du repère \mathcal{R} est le point O . La **base** \mathcal{B} est composée des vecteurs $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

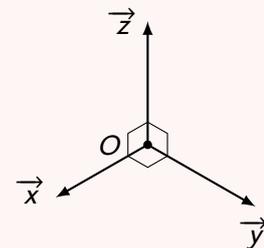
Si chaque direction est perpendiculaire aux deux autres, on dit que la base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est orthogonale.

Si la norme de chaque vecteur \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} est égale à 1 (unitaire), on dit que la base est normée.

Une base $\mathcal{B} = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est directe si et seulement si la mesure des angles orientés (\vec{x}, \vec{y}) , (\vec{y}, \vec{z}) et (\vec{z}, \vec{x}) est positive.

Le sens positif est donc défini par : $\vec{x} \xrightarrow{+} \vec{y} \xrightarrow{+} \vec{z} \xrightarrow{+} \vec{x}$

Ici la base \mathcal{B} est à la fois orthogonale, normée et directe. Le repère $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est alors **orthonormé direct**.



**Remarque**

La règle de la "main droite" aide à trouver l'ordre d'une base directe.

Définition

Un **référentiel** est un ensemble composé d'un repère spatial \mathcal{R} et d'un repère temporel. En mécanique, le repère temporel est unique.

Remarque

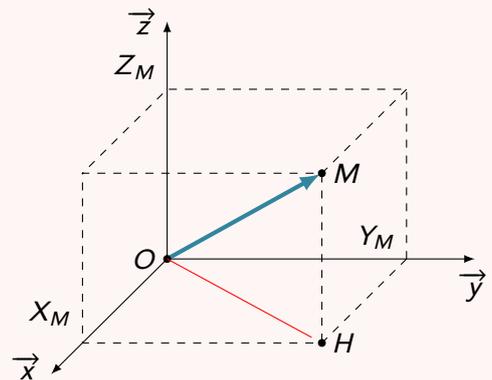
On différencie les directions des vecteurs \vec{x} , \vec{y} et \vec{z} des axes (O, \vec{x}) , (O, \vec{y}) et (O, \vec{z}) .

3 SYSTÈMES DE COORDONNÉES

Connaître la position d'un point M dans un repère \mathcal{R} d'origine O , c'est connaître à tout instant les coordonnées cartésiennes du vecteur \overrightarrow{OM} par rapport au repère $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Définition

- X_M , Y_M et Z_M sont les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
- H est la projection du point M dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y})
- Les coordonnées du point M dans le repère \mathcal{R} s'écrivent (X_M, Y_M, Z_M) .
- On pose $\overrightarrow{OM} = X_M \cdot \vec{x} + Y_M \cdot \vec{y} + Z_M \cdot \vec{z}$
- On écrit aussi : $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$

**4 PRODUIT SCALAIRE****A retenir**

Le produit **scalaire** du vecteur \vec{u} par le vecteur \vec{v} que l'on notera $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est le **nombre réel** défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Propriétés du produit scalaire : symétrie, distributif

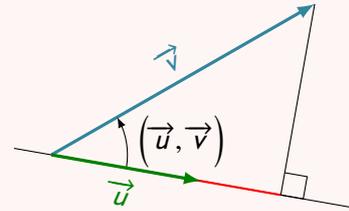


🔗 Définition

Graphiquement, si le vecteur \vec{u} est **unitaire** le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ correspond à la projection orthogonale du vecteur \vec{v} sur la direction du vecteur \vec{u} .

On pourra aussi écrire un vecteur \vec{V} quelconque dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ comme la somme de trois vecteurs :

$$\vec{V} = (\vec{V} \cdot \vec{x}) \vec{x} + (\vec{V} \cdot \vec{y}) \vec{y} + (\vec{V} \cdot \vec{z}) \vec{z}$$



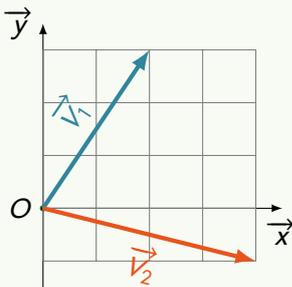
📌 Exemple

Dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on donne deux vecteurs : $\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $\vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$

Avec $x_1 = 2, y_1 = 3, z_1 = 0, x_2 = 4, y_2 = -1$ et $z_2 = 0$.

Question 1 : Tracer les vecteurs \vec{V}_1 et \vec{V}_2 dans un repère orthonormé direct.

Solution:



Question 2 : Exprimer le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$.
En déduire sa valeur numérique.

Solution: Le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ s'exprime par

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 &= [(\vec{V}_1 \cdot \vec{x}) \vec{x} + (\vec{V}_1 \cdot \vec{y}) \vec{y} + (\vec{V}_1 \cdot \vec{z}) \vec{z}] \cdot [(\vec{V}_2 \cdot \vec{x}) \vec{x} + (\vec{V}_2 \cdot \vec{y}) \vec{y} + (\vec{V}_2 \cdot \vec{z}) \vec{z}] \\ &= (\vec{V}_1 \cdot \vec{x}) \times (\vec{V}_2 \cdot \vec{x}) + (\vec{V}_1 \cdot \vec{y}) \times (\vec{V}_2 \cdot \vec{y}) + (\vec{V}_1 \cdot \vec{z}) \times (\vec{V}_2 \cdot \vec{z}) \\ &= x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \end{aligned}$$

Sa valeur numérique est : $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 2 \times 4 + 3 \times (-1) + 0 \times 0 = 5$

**Exemple**

Soit deux bases orthonormées directes $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ et $\mathcal{B}_2 = (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ telles que $\vec{z}_1 = \vec{z}_2$. On définit l'angle orienté $\alpha = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$.

Question 3 : Déterminer l'expression des produits scalaires suivants : $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2$ $\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1$ $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1$ $\vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1$ $\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1$.

Question 4 : En déduire l'expression de \vec{x}_2 et \vec{y}_2 dans la base \mathcal{B}_1 .

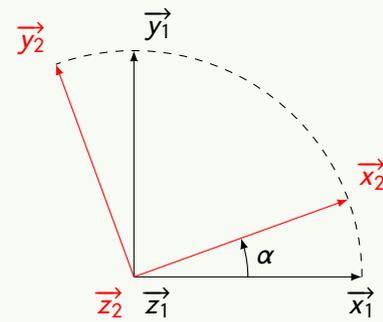
Solution:

$$\begin{aligned}\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 &= \cos \alpha \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1 &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha \\ \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ \vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1 &= \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha \\ \vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1 &= \cos(-\alpha) = \cos \alpha\end{aligned}$$

Solution:

Par définition :

$$\begin{aligned}\vec{x}_2 &= (\vec{x}_2 \cdot \vec{x}_1) \vec{x}_1 + (\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1) \vec{y}_1 + (\vec{x}_2 \cdot \vec{z}_1) \vec{z}_1 = \cos \alpha \cdot \vec{x}_1 + \sin \alpha \cdot \vec{y}_1 \\ \vec{y}_2 &= (\vec{y}_2 \cdot \vec{x}_1) \vec{x}_1 + (\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1) \vec{y}_1 + (\vec{y}_2 \cdot \vec{z}_1) \vec{z}_1 = -\sin \alpha \cdot \vec{x}_1 + \cos \alpha \cdot \vec{y}_1\end{aligned}$$



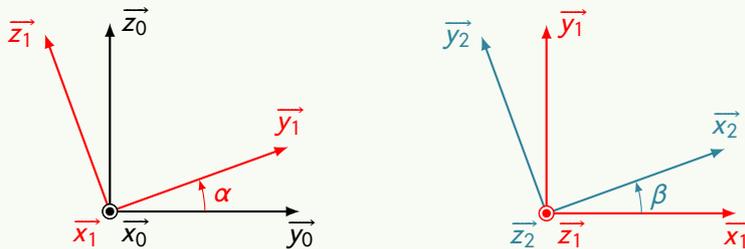
**Exemple**

Soit un système constitué des 3 solides définis de la manière suivante :

- S_0 , un bâti, auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0 (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- S_1 , un bras, auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1 (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- S_2 , un second bras, auquel on associe le repère $\mathcal{R}_2 (B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.
- \mathcal{R}_1 est en rotation autour de \mathcal{R}_0 autour de l'axe $(O, \vec{x}_0) = (O, \vec{x}_1)$. On pose $\vec{OA} = L \cdot \vec{y}_1$ avec L une constante et $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$. α étant variable.
- \mathcal{R}_2 est en rotation autour de \mathcal{R}_1 autour de l'axe $(A, \vec{z}_1) = (A, \vec{z}_2)$. On pose $\vec{AB} = \delta \cdot \vec{x}_2 + K \cdot \vec{y}_2$ avec δ variable et K une constante. $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$, β étant variable.

Question 5 : Réaliser les figures de changement de base planes.

Solution:



Question 6 : Donner l'expression des produits scalaires suivants : $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0$; $\vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0$; $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0$; $\vec{z}_1 \cdot \vec{y}_0$; $\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2$; $\vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2$; $\vec{x}_0 \cdot \vec{x}_2$; $\vec{y}_0 \cdot \vec{y}_2$; $\vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2$; $\vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2$; $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0$.

Solution:

$$\begin{array}{llll}
 \vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0 = \cos \alpha & \vec{y}_1 \cdot \vec{z}_0 = \sin \alpha & \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_0 = 0 & \vec{z}_1 \cdot \vec{y}_0 = -\sin \alpha \\
 \vec{z}_1 \cdot \vec{x}_2 = 0 & \vec{x}_1 \cdot \vec{y}_2 = \sin \beta & \vec{x}_0 \cdot \vec{x}_2 = \cos \beta & \vec{y}_0 \cdot \vec{y}_2 = \cos \alpha \cdot \cos \beta \\
 \vec{z}_0 \cdot \vec{y}_2 = \sin \alpha \cdot \cos \beta & \vec{z}_0 \cdot \vec{z}_2 = \cos \alpha & \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 = \cos \alpha \cdot \sin \beta &
 \end{array}$$