Cinématique 2

Analyser
Modéliser
Concevoir
Compétences PCSI
Résoudre
Communiquer
Expérimenter

Cinématique du point et du solide
Correction

-
PCSI1
Lycée Henri Loritz

Produit vectoriel

A retenir

Le produit **vectoriel** du vecteur $\overrightarrow{u}$ par le vecteur $\overrightarrow{v}$ que l'on notera $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est le **vecteur** $\overrightarrow{w}$ défini par :

- La direction de $\overrightarrow{w}$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- son sens est tel que la base $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right)$ soit directe.
- $\boxed{||\overrightarrow{w}|| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.|\sin\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)|}$

Le produit vectoriel donne un vecteur nul si un des deux vecteurs est nul ou si les deux vecteurs sont colinéaires.

Exemple

Dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = \left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$ on donne deux vecteurs : $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ $\quad \overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$

Avec $x_1 = 2,\ y_1 = 3,\ z_1 = 0,\ x_2 = 4,\ y_2 = -1$ et $z_2 = 0$.

Question 1 : Donner l'expression du produit vectoriel $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$.

Solution: Le produit vectoriel $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$ s'exprime par :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} &= \left(x_1.\overrightarrow{x} + y_1.\overrightarrow{y} + z_1.\overrightarrow{z}\right) \wedge \left(x_2.\overrightarrow{x} + y_2.\overrightarrow{y} + z_2.\overrightarrow{z}\right) \\
&= x_1.\overrightarrow{x} \wedge \left(y_2.\overrightarrow{y} + z_2.\overrightarrow{z}\right) + y_1.\overrightarrow{y} \wedge \left(x_2.\overrightarrow{x} + z_2.\overrightarrow{z}\right) + z_1.\overrightarrow{z} \wedge \left(x_2.\overrightarrow{x} + y_2.\overrightarrow{y}\right) \\
&= \left(y_1.z_2 - y_2.z_1\right).\overrightarrow{x} + \left(z_1.x_2 - z_2.x_1\right).\overrightarrow{y} + \left(x_1.y_2 - x_2.y_1\right).\overrightarrow{z}
\end{aligned}$$

Question 2 : En déduire les valeurs numériques de ses composantes.

Solution:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} &= (2 \times 0 + 1 \times 0).\overrightarrow{x} + (0 \times 4 - 0 \times 2).\overrightarrow{y} + (2 \times (-1) - 4 \times 3).\overrightarrow{z} \\
&= -14.\overrightarrow{z}
\end{aligned}$$

Solution:

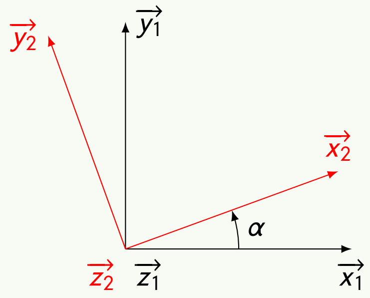
Distributivité : $\overrightarrow{u} \wedge (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$

Multiplication par un scalaire : $\lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \lambda\overrightarrow{v}$

Antisymétrie : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$

Exemple

Soit deux bases orthonormées directes $\mathcal{B}_1 = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1}\right)$ et $\mathcal{B}_2 = \left(\overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2}\right)$ telles que $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z_2}$. On définit l'angle orienté $\alpha = \left(\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}\right)$.



Question 3 : Déterminer l'expression des produits vectoriels suivants : $\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2}$ $\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2}$ $\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{x_1}$ $\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{x_2}$.

Solution:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{x_2} &= \sin(\alpha).\overrightarrow{z_1} \\
\overrightarrow{x_1} \wedge \overrightarrow{y_2} &= \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right).\overrightarrow{z_1} = \cos(\alpha).\overrightarrow{z_1} \\
\overrightarrow{z_2} \wedge \overrightarrow{x_1} &= \overrightarrow{y_1} \\
\overrightarrow{y_1} \wedge \overrightarrow{x_2} &= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).\overrightarrow{z_1} = -\cos(\alpha).\overrightarrow{z_1}
\end{aligned}
$$

Produit mixte

A retenir

On appelle produit mixte de trois vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ (pris dans cet ordre) le **nombre réel** noté $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right)$ tel que :

$$\boxed{\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_1} \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right)}$$

On pourra vérifier que ce produit mixte reste inchangé par permutation circulaire des termes.

$$\overrightarrow{V_1} \cdot \left(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\right) = \overrightarrow{V_2} \cdot \left(\overrightarrow{V_3} \wedge \overrightarrow{V_1}\right) = \overrightarrow{V_3} \cdot \left(\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}\right)$$

Pour qu'un produit mixte soit nul, il suffit que deux vecteurs soient colinéaires.

Dérivation vectorielle

1 Définition

Soit la base orthonormée directe $B = \left(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_1\right)$ et un vecteur $\overrightarrow{U}(t) = X(t)\overrightarrow{x}_1 + Y(t)\overrightarrow{y}_1 + Z(t)\overrightarrow{z}_1$.

Définition

On peut définir la **dérivée du vecteur $\overrightarrow{U}$ dans la base B** par :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_B = \dot{X}(t)\overrightarrow{x}_1 + \dot{Y}(t)\overrightarrow{y}_1 + \dot{Z}(t)\overrightarrow{z}_1$$

Dans la dérivation vectorielle, la **base de dérivation B** a comme rôle d'être une référence pour la dérivation, c'est-à-dire que **les vecteurs constituant la base sont considérés comme constants**.

Dans le cas de la définition ci-dessus, on a alors :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_B = \left[\frac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_B = \left[\frac{d\overrightarrow{z}_1}{dt}\right]_B = \overrightarrow{0}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_B &= \dot{X}(t)\overrightarrow{x}_1 + \dot{Y}(t)\overrightarrow{y}_1 + \dot{Z}(t)\overrightarrow{z}_1 + X(t)\left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_B + Y(t)\left[\frac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_B + Z(t)\left[\frac{d\overrightarrow{z}_1}{dt}\right]_B \\ &= \dot{X}(t)\overrightarrow{x}_1 + \dot{Y}(t)\overrightarrow{y}_1 + \dot{Z}(t)\overrightarrow{z}_1\end{aligned}$$

Remarque

Le choix d'une base orthonormée directe sera systématique car il permet de simplifier les calculs de dérivation vectorielle.

2 Dérivation dans le cas d'une base mobile

On considère maintenant une base $B_1 = \left(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_1\right)$ mobile par rapport à une base $B_0 = \left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$ fixe. On considère que ces deux bases sont orthonormées directes.

Soit un vecteur $\overrightarrow{U}$ défini dans la base B_1 :

$$\overrightarrow{U}(t) = X(t)\overrightarrow{x}_1 + Y(t)\overrightarrow{y}_1 + Z(t)\overrightarrow{z}_1$$

A retenir

Formule de Bour

$$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{U}}$$

On définit $\overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)$ comme le **vecteur taux de rotation de la base B_1 par rapport à B_0**.

Démonstration

D'après plus haut :

$$\begin{aligned}\left[\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_0} &= \dot{X}(t)\overrightarrow{x}_1 + \dot{Y}(t)\overrightarrow{y}_1 + \dot{Z}(t)\overrightarrow{z}_1 + X(t)\left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0} + Y(t)\left[\frac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_{B_0} + Z(t)\left[\frac{d\overrightarrow{z}_1}{dt}\right]_{B_0}\\ &= \left[\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_1} + X(t)\left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0} + Y(t)\left[\frac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_{B_0} + Z(t)\left[\frac{d\overrightarrow{z}_1}{dt}\right]_{B_0}\end{aligned}$$

La base B_1 est normée alors :

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{x}_1\right\|^2 = 1 &\Longrightarrow \overrightarrow{x}_1 \cdot \left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0} = 0\\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{x}_1 \perp \left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0}\\ &\Longleftrightarrow \left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0} = c\overrightarrow{y}_1 + e\overrightarrow{z}_1\end{aligned}$$

De même : $\left[\frac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_{B_0} = f\overrightarrow{x}_1 + a\overrightarrow{z}_1 \qquad \left[\frac{d\overrightarrow{z}_1}{dt}\right]_{B_0} = b\overrightarrow{x}_1 + d\overrightarrow{y}_1$

La base B_1 est aussi orthogonale d'où

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x}_1 \cdot \overrightarrow{y}_1 = 0 &\Longrightarrow \left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0} \cdot \overrightarrow{y}_1 + \left[\frac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_{B_0} \cdot \overrightarrow{x}_1 = 0\\ &\Longleftrightarrow c + f = 0\end{aligned}$$

De même : $e + b = 0 \qquad a + d = 0$

D'où $\left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0} = c\overrightarrow{y}_1 - b\overrightarrow{z}_1 \qquad \left[\frac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_{B_0} = a\overrightarrow{z}_1 - c\overrightarrow{x}_1 \qquad \left[\frac{d\overrightarrow{z}_1}{dt}\right]_{B_0} = b\overrightarrow{x}_1 - a\overrightarrow{y}_1$

On pose un vecteur $\overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) = a\overrightarrow{x}_1 + b\overrightarrow{y}_1 + c\overrightarrow{z}_1$. Alors :

$$\begin{cases}\left[\frac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0} = \left(a\overrightarrow{x}_1 + b\overrightarrow{y}_1 + c\overrightarrow{z}_1\right) \wedge \overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{x}_1\\ \left[\frac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_{B_0} = \left(a\overrightarrow{x}_1 + b\overrightarrow{y}_1 + c\overrightarrow{z}_1\right) \wedge \overrightarrow{y}_1 = \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{y}_1\\ \left[\frac{d\overrightarrow{z}_1}{dt}\right]_{B_0} = \left(a\overrightarrow{x}_1 + b\overrightarrow{y}_1 + c\overrightarrow{z}_1\right) \wedge \overrightarrow{z}_1 = \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{z}_1\end{cases}$$

En remplaçant dans l'expression du début :

$$\boxed{\left[\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{U}}$$

3 Inversion des bases de dérivation

En inversant les bases de dérivation B_0 et B_1 on obtient :

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)\wedge\overrightarrow{U} \\ \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_1} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_0} + \overrightarrow{\Omega}(B_0/B_1)\wedge\overrightarrow{U} \end{cases}$$

En injectant la deuxième relation dans la première :

$$\left[\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_0} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}}{dt}\right]_{B_0} + \overrightarrow{\Omega}(B_0/B_1)\wedge\overrightarrow{U} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)\wedge\overrightarrow{U}$$

$$\Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{\Omega}(B_0/B_1) + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)\right)\wedge\overrightarrow{U} = \overrightarrow{0}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega}(B_0/B_1) + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) = \overrightarrow{0}$$

A retenir

On a alors :

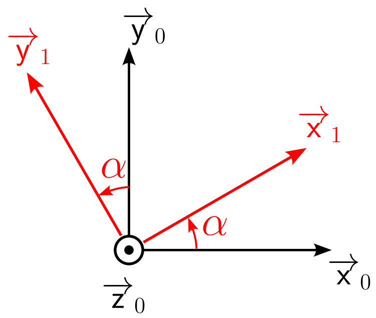
$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(B_0/B_1) = -\overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)}$$

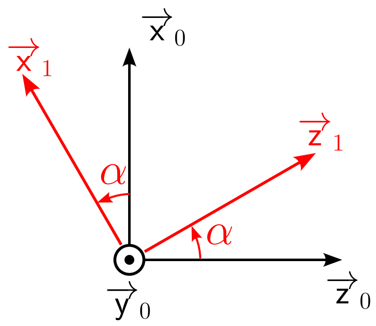
4 Vecteur taux de rotation dans le cas de rotation

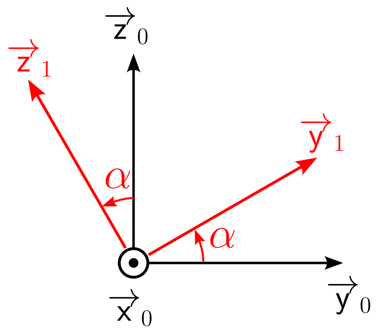
A retenir

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)$ est appelé le **vecteur instantané de rotation** (ou **taux de rotation**) de la base B_1 par rapport à la base B_0.

$\alpha = \left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_1\right) = \left(\overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{y}_1\right)$ $\quad$ $\alpha = \left(\overrightarrow{z}_0, \overrightarrow{z}_1\right) = \left(\overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{x}_1\right)$ $\quad$ $\alpha = \left(\overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{y}_1\right) = \left(\overrightarrow{z}_0, \overrightarrow{z}_1\right)$







$\overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) = \dot{\alpha}\overrightarrow{z}_0$ $\quad$ $\overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) = \dot{\alpha}\overrightarrow{y}_0$ $\quad$ $\overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) = \dot{\alpha}\overrightarrow{x}_0$

Les figures ci-dessus sont appelées des **figures planes de changement de base.**

Composition de plusieurs rotations :

$$\overrightarrow{\Omega}(B_2/B_0) = \overrightarrow{\Omega}(B_2/B_1) + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)$$

Démonstration

On va détailler pour la 1ère figure de changement de base. Pour les autres, la démarche est similaire.
Dans le cas de la première figure de changement de base :

$$\begin{cases} \overrightarrow{x}_1 & = \cos\alpha\,\overrightarrow{x}_0 + \sin\alpha\,\overrightarrow{y}_0 \\ \overrightarrow{y} & = -\sin\alpha\,\overrightarrow{x}_0 + \cos\alpha\,\overrightarrow{y}_0 \end{cases}$$

En dérivant les vecteurs dans la base B_0 :

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0} & = -\dot{\alpha}\sin\alpha\,\overrightarrow{x}_0 + \dot{\alpha}\cos\alpha\,\overrightarrow{y}_0 = \dot{\alpha}\,\overrightarrow{y}_1 \\ \left[\dfrac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_{B_0} & = -\dot{\alpha}\cos\alpha\,\overrightarrow{x}_0 - \dot{\alpha}\sin\alpha\,\overrightarrow{y}_0 = -\dot{\alpha}\,\overrightarrow{x}_1 \end{cases}$$

Aussi, d'après la formule de Bour :

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_0} & = \left[\dfrac{d\overrightarrow{x}_1}{dt}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)\wedge\overrightarrow{x}_1 = \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)\wedge\overrightarrow{x}_1 \\ \left[\dfrac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_{B_0} & = \left[\dfrac{d\overrightarrow{y}_1}{dt}\right]_{B_1} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)\wedge\overrightarrow{y}_1 = \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)\wedge\overrightarrow{y}_1 \end{cases}$$

Par identification, on a alors :

$$\begin{cases} \dot{\alpha}\,\overrightarrow{y}_1 & = \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)\wedge\overrightarrow{x}_1 \\ -\dot{\alpha}\,\overrightarrow{x}_1 & = \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)\wedge\overrightarrow{y}_1 \end{cases}$$

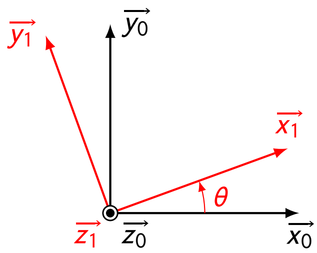
En posant $\overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) = a\overrightarrow{x}_1 + b\overrightarrow{y}_1 + c\overrightarrow{z}_1$, on trouve $a = b = 0$ et $c = \dot{\alpha}$.

5 Dérivée temporelle d'un vecteur unitaire en rotation autour d'un axe unique

Soient les repères $\mathcal{R}_0 = (O, \overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0})$ et $\mathcal{R}_1 = (O, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$.

$\mathcal{R}_1$ se déduit de $\mathcal{R}_0$ par rotation d'un angle θ autour de l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$.

On cherche à calculer la dérivée du vecteur unitaire $\overrightarrow{x_1}$ par rapport au temps sachant que l'angle θ n'est pas fixe.



L'expression de $\overrightarrow{x_1}$ dans la base $\mathcal{B}_0$ est donnée par : $\overrightarrow{x_1} = \cos(\theta).\overrightarrow{x_0} + \sin(\theta).\overrightarrow{y_0}$ Ainsi : $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\dfrac{\mathrm{d}(\cos(\theta).\overrightarrow{x_0} + \sin(\theta).\overrightarrow{y_0})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0}$

En décomposant cette dérivée, on obtient :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = -\dot{\theta}.\sin(\theta).\overrightarrow{x_0} + \cos(\theta).\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} + \dot{\theta}.\cos(\theta).\overrightarrow{y_0} + \sin(\theta).\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{y_0}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0}$$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{x_0}$ et $\overrightarrow{y_0}$ sont fixes dans $\mathcal{R}_0$, on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{0} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{y_0}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{0}$$

Ainsi : $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}.(-\sin(\theta).\overrightarrow{x_0} + \cos(\theta).\overrightarrow{y_0}) = \dot{\theta}.\overrightarrow{y_1}$

A retenir

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{x_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \dot{\theta}.\overrightarrow{y_1} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{y_1}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = -\dot{\theta}.\overrightarrow{x_1}$$

Cinématique du point

1 Définitions

Soit un point M en mouvement dans un repère $R = \left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.

Définition

Le vecteur vitesse d'un point M par rapport à R est la dérivée par rapport au temps du vecteur position $\overrightarrow{OM}$. Le vecteur vitesse est **tangent** à la trajectoire du point.

$$\overrightarrow{V}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right]_R$$

Le vecteur accélération d'un point M par rapport au repère R est la dérivée seconde par rapport au temps du vecteur position. On en déduit que l'accélération de M est la dérivée dans R de la vitesse de M.

$$\overrightarrow{a}(M/R) = \left[\frac{d\overrightarrow{V}(M/R)}{dt}\right]_R = \left[\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right]_R$$

Attention

La dérivation des vecteurs se fait dans le repère R mais les composantes de ces vecteurs peuvent être exprimées dans tout autre repère. Il faut alors bien différencier **repère de dérivation (ici R) et repères d'expression**.

Solution: Exemple : $\overrightarrow{V}(M/R) = -a\dot{\alpha}\overrightarrow{x}_1 - b\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)\overrightarrow{x}_2$

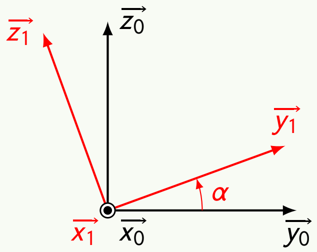
Exemple

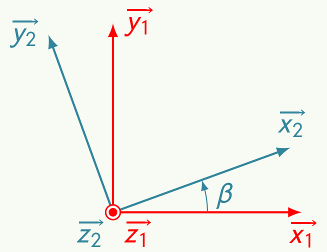
Soit un système constitué des 3 solides définis de la manière suivante :

- S_0, un bâti, auquel on associe le repère $\mathcal{R}_0$ $(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.
- S_1, un bras, auquel on associe le repère $\mathcal{R}_1$ $(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$.
- S_2, un second bras, auquel on associe le repère $\mathcal{R}_2$ $(B, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.
- $\mathcal{R}_1$ est en rotation autour de $\mathcal{R}_0$ autour de l'axe $(O, \vec{x_0}) = (O, \vec{x_1})$. On pose $\overrightarrow{OA} = L.\vec{y_1}$ avec L une constante et $\alpha = (\vec{y_0}, \vec{y_1})$. α étant variable.
- $\mathcal{R}_2$ est en rotation autour de $\mathcal{R}_1$ autour de l'axe $(A, \vec{z_1}) = (A, \vec{z_2})$. On pose $\overrightarrow{AB} = \delta.\vec{x_2} + K.\vec{y_2}$ avec δ variable et K une constante. $\beta = (\vec{x_1}, \vec{x_2})$, β étant variable.

Question 4 : Réaliser les figures de changement de base planes.

Solution:





Question 5 : Donner l'expression des produits scalaires suivants : $\vec{y_1}\cdot\vec{y_0}$; $\vec{y_1}\cdot\vec{z_0}$; $\vec{x_1}\cdot\vec{y_0}$; $\vec{z_1}\cdot\vec{y_0}$; $\vec{z_1}\cdot\vec{x_2}$; $\vec{x_1}\cdot\vec{y_2}$; $\vec{x_0}\cdot\vec{x_2}$; $\vec{y_0}\cdot\vec{y_2}$; $\vec{z_0}\cdot\vec{y_2}$; $\vec{z_0}\cdot\vec{z_2}$; $\vec{x_2}\cdot\vec{y_0}$.

Solution: Info : il peut être indispensable de projeter les vecteurs (dans ce cas là) avant de faire le produit scalaire ou vectoriel, quand les vecteurs ne sont pas dans les mêmes figures de changement de base.
Par exemple : $\vec{y_0}\cdot\vec{y_2} = \vec{y_0}.(-\sin\beta.\vec{x_1} + \cos\beta.\vec{y_1}) = \cos\alpha.\cos\beta$

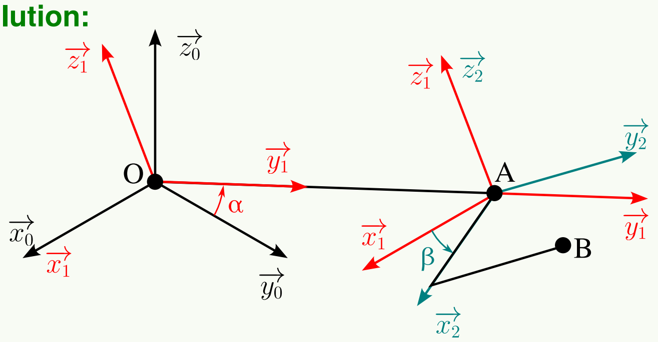
$\vec{y_1}\cdot\vec{y_0} = \cos\alpha$ $\quad$ $\vec{y_1}\cdot\vec{z_0} = \sin\alpha$ $\quad$ $\vec{x_1}\cdot\vec{y_0} = 0$ $\quad$ $\vec{z_1}\cdot\vec{y_0} = -\sin\alpha$
$\vec{z_1}\cdot\vec{x_2} = 0$ $\quad$ $\vec{x_1}\cdot\vec{y_2} = -\sin\beta$ $\quad$ $\vec{x_0}\cdot\vec{x_2} = \cos\beta$ $\quad$ $\vec{y_0}\cdot\vec{y_2} = \cos\alpha.\cos\beta$
$\vec{z_0}\cdot\vec{y_2} = \sin\alpha.\cos\beta$ $\quad$ $\vec{z_0}\cdot\vec{z_2} = \cos\alpha$ $\quad$ $\vec{x_2}\cdot\vec{y_0} = \cos\alpha.\sin\beta$

Question 6 : Donner l'expression des produits vectoriels suivants : $\vec{y_1}\wedge\vec{y_0}$; $\vec{y_1}\wedge\vec{z_0}$; $\vec{x_1}\wedge\vec{y_0}$; $\vec{z_1}\wedge\vec{y_0}$; $\vec{z_1}\wedge\vec{x_2}$; $\vec{x_1}\wedge\vec{y_2}$; $\vec{x_0}\wedge\vec{x_2}$; $\vec{y_0}\wedge\vec{y_2}$; $\vec{z_0}\wedge\vec{y_2}$; $\vec{z_0}\wedge\vec{z_2}$; $\vec{x_2}\wedge\vec{y_0}$.

Solution:
$\vec{y_1}\wedge\vec{y_0} = -\sin\alpha.\vec{x_0}$ $\quad$ $\vec{y_1}\wedge\vec{z_0} = \cos\alpha.\vec{x_0}$ $\quad$ $\vec{x_1}\wedge\vec{y_0} = \vec{z_0}$ $\quad$ $\vec{z_1}\wedge\vec{y_0} = -\cos\alpha.\vec{x_0}$
$\vec{z_1}\wedge\vec{x_2} = \vec{y_2}$ $\quad$ $\vec{x_1}\wedge\vec{y_2} = \cos\beta.\vec{z_1}$ $\quad$ $\vec{x_0}\wedge\vec{x_2} = \sin\beta.\vec{z_1}$
$\vec{y_0}\wedge\vec{y_2} = \sin\alpha.\cos\beta.\vec{x_0} + \sin\beta.\vec{z_0}$
$\vec{z_0}\wedge\vec{y_2} = -\cos\alpha\cos\beta.\vec{x_0} - \sin\beta.\vec{y_0}$ $\quad$ $\vec{z_0}\wedge\vec{z_2} = \sin\alpha.\vec{x_0}$
$\vec{x_2}\wedge\vec{y_0} = -\sin\alpha.\sin\beta.\vec{x_0} + \cos\beta.\vec{z_0}$

Question 7 : Réaliser un schéma 3D montrant la position relative des 3 solides. Les angles seront pris positifs, à 30° et les distances positives.

Solution:



Exemple

Question 8 : Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OB}$.

Solution:

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = L.\overrightarrow{y_1} + \delta.\overrightarrow{x_2} + K.\overrightarrow{y_2}$$

Question 9 : Déterminer les expressions des vecteurs suivants de la manière la plus simple possible :
$\left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{y_0}}{\mathrm{d}t}\right|_0$; $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{y_1}}{\mathrm{d}t}\right|_0$; $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{z_0}}{\mathrm{d}t}\right|_1$; $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{z_1}}{\mathrm{d}t}\right|_1$; $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_0$; $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right|_0$; $\left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right|_2$.

Solution:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{y_0}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \vec{0} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{y_1}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{z_0}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \dot{\alpha}.\overrightarrow{y_0} \quad \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{z_1}}{\mathrm{d}t}\right|_1 = \vec{0}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \left(\dot{\beta}.\overrightarrow{z_2} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1}\right) \wedge \overrightarrow{z_2} = -\dot{\alpha}.\overrightarrow{y_1} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \left(\dot{\beta}.\overrightarrow{z_2} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1}\right) \wedge \overrightarrow{y_2} = -\dot{\beta}.\overrightarrow{x_2} - \dot{\alpha}.\cos\beta.\overrightarrow{z_1}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{x_0}}{\mathrm{d}t}\right|_2 = -\left(\dot{\beta}.\overrightarrow{z_2} + \dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1}\right) \wedge \overrightarrow{x_1} = -\dot{\beta}.\overrightarrow{y_1}$$

Question 10 : Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{B/0}}$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{B/0}} &= \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}L.\overrightarrow{y_1} + \delta.\overrightarrow{x_2} + K.\overrightarrow{y_2}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \\
&= L.\dot{\alpha}.\overrightarrow{z_1} + \dot{\delta}.\overrightarrow{x_2} + \delta.\left(\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2} + \dot{\alpha}.\sin\beta.\overrightarrow{z_1}\right) + K.\left(-\dot{\beta}.\overrightarrow{x_2} - \dot{\alpha}.\cos\beta.\overrightarrow{z_1}\right) \\
&= \left(\dot{\delta} - K.\dot{\beta}\right).\overrightarrow{x_2} + \delta.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2} + \dot{\alpha}.\left(L + \delta.\sin\beta - K.\cos\beta\right).\overrightarrow{z_1}
\end{aligned}$$

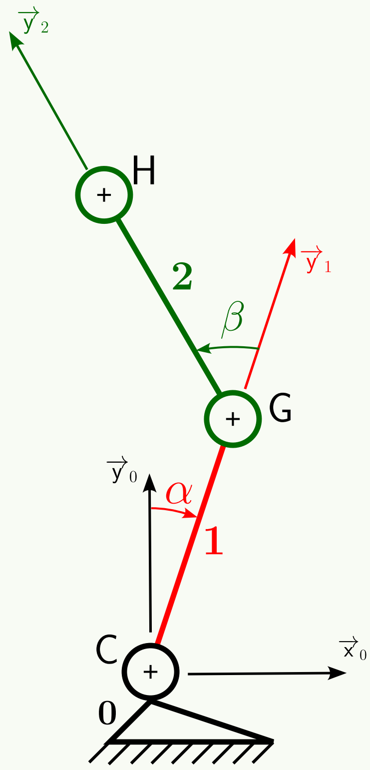
Question 11 : Déterminer le vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma_{B/0}}$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Gamma_{B/0}} &= \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{V_{B/0}}}{\mathrm{d}t}\right|_0 = \left.\frac{\mathrm{d}\left(\dot{\delta} - K.\dot{\beta}\right).\overrightarrow{x_2} + \delta.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2} + \dot{\alpha}.\left(L + \delta.\sin\beta - K.\cos\beta\right).\overrightarrow{z_1}}{\mathrm{d}t}\right|_0 \\
&= \left(\ddot{\delta} - K.\ddot{\beta}\right).\overrightarrow{x_2} + \left(\dot{\delta}.\dot{\beta} + \delta.\ddot{\beta}\right).\overrightarrow{y_2} + \left[\ddot{\alpha}.\left(L + \delta.\sin\beta - K.\cos\beta\right) + \dot{\alpha}.\left(\dot{\delta}.\sin\beta + \delta.\dot{\beta}.\cos\beta + K.\dot{\beta}\sin\beta\right)\right].\overrightarrow{z_1} \\
&\quad + \left(\dot{\delta} - K.\dot{\beta}\right).\left(\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2} + \dot{\alpha}.\sin\beta.\overrightarrow{z_1}\right) + \delta.\dot{\beta}.\left(-\dot{\beta}.\overrightarrow{x_2} - \dot{\alpha}.\cos\beta.\overrightarrow{z_1}\right) + \dot{\alpha}.\left(L + \delta.\sin\beta - K.\cos\beta\right).\left(-\dot{\alpha}.\overrightarrow{x_1}\right) \\
&= -\dot{\alpha}^2.\left(L + \delta.\sin\beta - K.\cos\beta\right).\overrightarrow{x_1} + \left[\ddot{\alpha}.\left(L + \delta.\sin\beta - K.\cos\beta\right) + 2.\dot{\alpha}.\dot{\delta}.\sin\beta\right].\overrightarrow{z_1} \\
&+ \left(\ddot{\delta} - K.\ddot{\beta} - \delta.\dot{\beta}^2\right).\overrightarrow{x_2} + \left(2.\dot{\delta}.\dot{\beta} + \delta.\ddot{\beta} - K.\dot{\beta}^2\right).\overrightarrow{y_2}
\end{aligned}$$

Exemple

Pour la conception d'exosquelettes de rééducation, il est nécessaire de comprendre la dynamique de la marche humaine, notamment celle asymptomatique (d'un humain en bonne santé). On propose dans cet exemple d'étudier la cinématique de la jambe d'appui lors de la phase dite « pendulaire »(une seule jambe en appui sur le sol). On suppose le pied en liaison encastrement avec le sol **0**. la cheville, le genou et la hanche sont modélisés par des liaisons pivot respectivement d'axes $\left(C,\overrightarrow{z}_0\right)$, $\left(G,\overrightarrow{z}_0\right)$ et $\left(H,\overrightarrow{z}_0\right)$.



On associe un repère $R_0 = (C,\overrightarrow{x}_0,\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{z}_0)$ au sol **0**, un repère $R_1 = (C,\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{y}_1,\overrightarrow{z}_1)$ au tibia **1** et un repère $R_2 = (G,\overrightarrow{x}_2,\overrightarrow{y}_2,\overrightarrow{z}_2)$ à la cuisse **2**.

La flexion/extension de la cheville par rapport au tibia est définie par l'angle $\alpha = \left(\overrightarrow{x}_0,\overrightarrow{x}_1\right) = \left(\overrightarrow{y}_0,\overrightarrow{y}_1\right)$ et la flexion/extension du genou par un angle $\beta = \left(\overrightarrow{x}_1,\overrightarrow{x}_2\right) = \left(\overrightarrow{y}_1,\overrightarrow{y}_2\right)$

On pose $\overrightarrow{CG} = a\overrightarrow{y}_1$ et $\overrightarrow{GH} = b\overrightarrow{y}_2$ avec a et b des constantes.

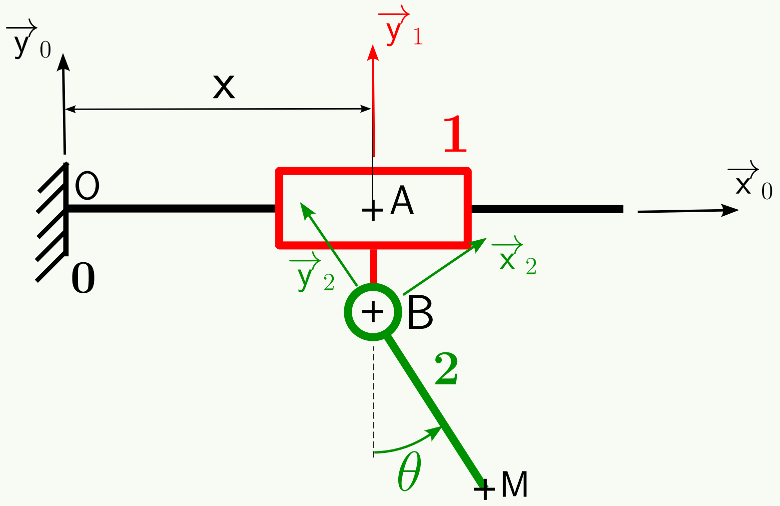
Question 12 : Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(H/R_0)$.

Solution: Méthode : Figures de changement de base, puis dérivation du vecteur position (relation de Chasles puis formule de Bour).

$$\overrightarrow{V}(H/R_0) = -a\dot{\alpha}\overrightarrow{x}_1 - b\left(\dot{\alpha}+\dot{\beta}\right)\overrightarrow{x}_2$$

Exemple

On considère un mécanisme modélisé par le schéma cinématique suivant :



Un chariot **1** est en liaison glissière de direction $\overrightarrow{x}_0$ avec le bâti **0.** Un pendule **2** est en liaison pivot d'axe $\left(B, \overrightarrow{z}_0\right)$ avec **1.**

Le repère $R_0 = \left(O, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$ est attaché au bâti **0.** Un repère $R_1 = \left(A, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_1\right)$ est associé au chariot **1.** Un repère $R_2 = \left(B, \overrightarrow{x}_2, \overrightarrow{y}_2, \overrightarrow{z}_2\right)$ est associé au pendule **2.** On définit l'angle $\theta = \left(\overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{x}_2\right) = \left(\overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{y}_2\right)$.

On pose $\overrightarrow{OA} = x(t)\overrightarrow{x}_0$, $\overrightarrow{AB} = -a\overrightarrow{y}_1$ et $\overrightarrow{BM} = -l\overrightarrow{y}_2$ avec a et l des constantes.

Question 13 : Calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M/R_0)$.

Solution: $\overrightarrow{V}(M/R_0) = \dot{x}\overrightarrow{x}_0 + l\dot{\theta}\overrightarrow{x}_2$

2 Composition des vecteurs vitesse

Soit un point M en mouvement dans un repère $R_1 = \left(O_1, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_1\right)$, lui-même en mouvement par rapport à un repère $R_0 = \left(O_0, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$ fixe.

La position du point M par rapport à O_0 est : $\boxed{\overrightarrow{O_0M} = \overrightarrow{O_0O_1} + \overrightarrow{O_1M}}$.

Le calcul du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M/R_0)$ se fait par dérivation :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{V}(M/R_0) &= \left[\frac{d\overrightarrow{O_0O_1}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0}\\ &= \overrightarrow{V}(O_1/R_0) + \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0}\end{aligned}$$

Pour le troisième terme d'après la formule de Bour :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{V}(M/R_1) + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

D'où : $\overrightarrow{V}(M/R_0) = \overrightarrow{V}(M/R_1) + \overrightarrow{V}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$

A retenir

On a alors la relation : $\boxed{\overrightarrow{V}(M/R_0) = \overrightarrow{V}(M/R_1) + \overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0)}$ avec :

- $\overrightarrow{V}(M/R_0)$ la **vitesse absolue** de M dans le repère R_0 fixe ;
- $\overrightarrow{V}(M/R_1)$ la **vitesse relative** de M dans le repère R_1 mobile ;
- $\overrightarrow{V}(M \in R_1/R_0) = \overrightarrow{V}(O_1/R_0) + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}$ la **vitesse d'entraînement** de M de R_1 par rapport à R_0.

Remarque

La vitesse d'entraînement du point M de R_1 par rapport à R_0 correspond à la part de la vitesse du point M due au mouvement de R_1 par rapport à R_0.

3 Composition des vecteurs accélération

Pour le calcul de l'accélération, on dérive la composition des vecteurs vitesses :

$$\overrightarrow{a}(M/R_0) = \overrightarrow{a}(O_1/R_0) + \left[\frac{d\overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0)}{dt}\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0} + \left[\frac{d\overrightarrow{V}(M/R_1)}{dt}\right]_{R_0}$$

D'après la formule de Bour :

$$\begin{cases}\left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}\\ \left[\frac{d\overrightarrow{V}(M/R_1)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\frac{d\overrightarrow{V}(M/R_1)}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1) = \overrightarrow{a}(M/R_1) + \overrightarrow{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{V}(M/R_1)\end{cases}$$

D'où

$$\boxed{\vec{a}(M/R_0) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}(O_1/R_0) + \left[\frac{d\vec{\Omega}(B_1/B_0)}{dt}\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \left(\vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) + 2\vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)}$$

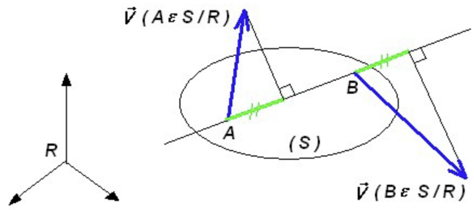
On peut définir :

- $\vec{a}(M/R_0)$ l'**accélération absolue** de M dans R_0 ;
- $\vec{a}(M/R_1)$ l'**accélération relative** de M dans R_1 ;
- $\vec{a}(M \in R_1/R_0) = \vec{a}(O_1/R_0) + \left[\frac{d\vec{\Omega}(B_1/B_0)}{dt}\right]_{R_0} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \left(\vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)$ l'**accélération d'entraînement** ;
- $2\vec{\Omega}(B_1/B_0) \wedge \vec{V}(M/R_1)$ l'**accélération de Coriolis.**

Cinématique du solide

1 Equiprojectivité des vitesses d'un solide indéformable

Soit le mouvement d'un solide S auquel on associe le repère R_1, par rapport à un repère $R = \left(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}\right)$.



Soit A et B deux points appartenant physiquement à S. Si S est un solide indéformable alors :

$$\overrightarrow{AB}^2 = \text{constante} = k \Longleftrightarrow \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}\right)^2 = k$$

Par dérivation par rapport au temps dans le repère R :

$$\left(\overrightarrow{V}(B \in S/R_0) - \overrightarrow{V}(A \in S/R_0)\right) \cdot \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{\overrightarrow{V}(A \in S/R_0) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}(B \in S/R_0) \cdot \overrightarrow{AB}}$$

Cette propriété, spécifique aux solides indéformables, est appelée **équiprojectivité des vecteurs vitesse**.

2 Torseur cinématique

Cette propriété d'équiprojectivité des vecteurs permet de décrire le champ des vecteurs vitesse des points d'un solide S par rapport à un repère R à l'aide d'un outil mathématique : le **torseur cinématique**.

Définition

Le **torseur cinématique** $\{\mathcal{V}(S/R)\}$ **au point A** est définie par :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}(S/R) \\ \overrightarrow{V}(A \in S/R) \end{Bmatrix}_A$$

Avec $\overrightarrow{\Omega(S/R)}$ le vecteur taux de rotation du solide S par rapport à R qui est la **résultante du torseur** et $\overrightarrow{V}(A \in S/R)$ le vecteur vitesse du point A appartenant à S par rapport à R, qui est le **moment du torseur**.

En projetant ce torseur dans le repère R, on obtient :

$$\{\mathcal{V}(S/R)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}(S/R) = \omega_x \overrightarrow{x} + \omega_y \overrightarrow{y} + \omega_z \overrightarrow{z} \\ \overrightarrow{V}(A \in S/R) = V_x \overrightarrow{x} + V_y \overrightarrow{y} + V_z \overrightarrow{z} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & V_z \end{Bmatrix}_{(A, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})}$$

2.1 Propriétés du torseur cinématique

On associe au solide S le repère R_1 pour décrire son mouvement par rapport au repère R fixe. En dérivant le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par rapport au temps dans le repère R :

$$\left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$= \left[\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right]_R - \left[\frac{\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_R = \overrightarrow{V}(B \in S/R) - \overrightarrow{V}(A \in S/R)$$

♥ A retenir

En comparant ces deux équations, on obtient la **formule de Varignon** :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(B\in S/R)=\overrightarrow{V}(A\in S/R)+\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{\Omega}(S/R)}$$

Cette formule permet de **transporter le torseur d'un point A à un point B** :

$$\boxed{\{\mathcal{V}(S/R)\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega}(S/R)\\ \overrightarrow{V}(B\in S/R)\end{Bmatrix}_B \qquad \{\mathcal{V}(S/R)\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega}(S/R)\\ \overrightarrow{V}(A\in S/R)\end{Bmatrix}_A}$$

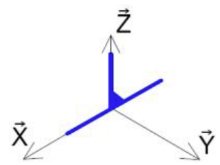
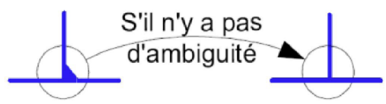
♥ A retenir

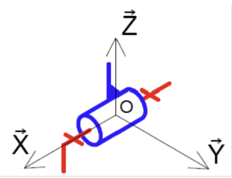
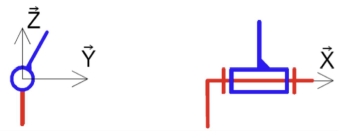
Il existe deux formes particulières de torseurs cinématiques :

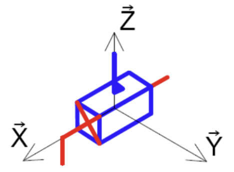
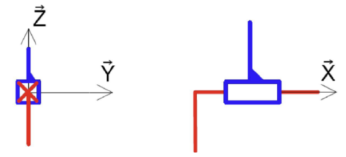
- le **torseur glisseur** : $\boxed{\{\mathcal{V}(S/R)\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{\Omega}(S/R)\\ \overrightarrow{0}\end{Bmatrix}_{-}}$. Ce dernier a la **même valeur en tout point** ;
- le **torseur couple** : $\boxed{\{\mathcal{V}(S/R)\}=\begin{Bmatrix}\overrightarrow{0}\\ \overrightarrow{V}(A\in S/R)\end{Bmatrix}_A}$.

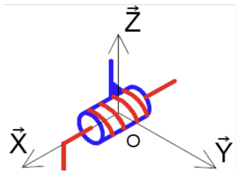
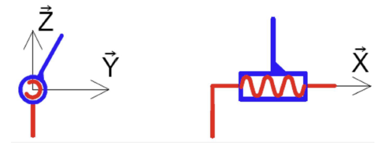
2.2 Torseurs cinématiques des modèles de liaisons

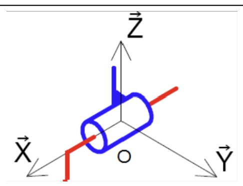
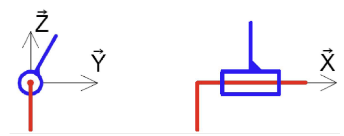
Pour chaque modèle de liaison, il est possible de représenter le champ de vitesses résultant par un torseur cinématique. Les tableaux ci-dessous rappellent les symboles des liaisions et leurs torseurs. Ces tableaux doivent être **retenus**.

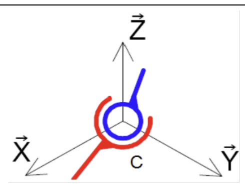
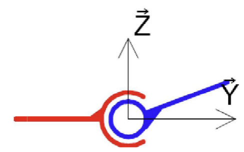
Liaison encastrement	Le torseur cinématique est nul en tout point P de l'espace	
		

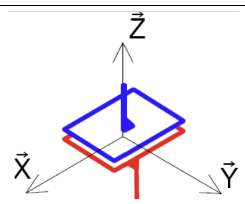
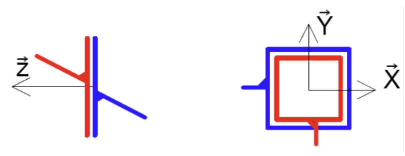
Liaison pivot d'axe $\left(O,\vec{x}\right)$	$\{\mathcal{V}(2/1)\}=\begin{Bmatrix}\omega_x & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{Bmatrix}_{(P,\vec{x},-,-)}=\begin{Bmatrix}\omega_x\vec{x}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}_P \quad \forall P\in\left(O,\vec{x}\right)$	
		

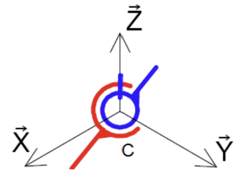
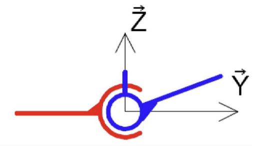
<table>
<tr><td rowspan="2">Liaison glissière de direction $\vec{x}$</td><td colspan="2">$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{\begin{matrix} 0 & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(P,-,-,-)} = \left\{\begin{matrix} \vec{0} \\ V_x\vec{x} \end{matrix}\right\}_P \quad \forall P$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

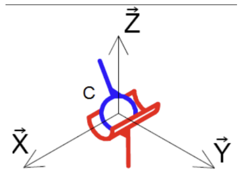
<table>
<tr><td rowspan="2">Liaison hélicoïdale d'axe $(O,\vec{x})$</td><td colspan="2">$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{\begin{matrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(P,\vec{x},-,-)} = \left\{\begin{matrix} \omega_x\vec{x} \\ V_x\vec{x} \end{matrix}\right\}_P \quad \forall P \in (O,\vec{x})$
où $\lvert V_x \rvert = \dfrac{p}{2\pi}\lvert\omega_x\rvert$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

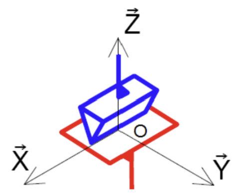
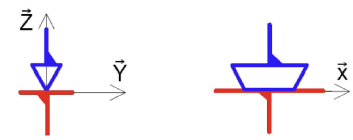
<table>
<tr><td rowspan="2">Liaison pivot glissant d'axe $(O,\vec{x})$</td><td colspan="2">$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{\begin{matrix} \omega_x & V_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{(P,\vec{x},-,-)} = \left\{\begin{matrix} \omega_x\vec{x} \\ V_x\vec{x} \end{matrix}\right\}_P \quad \forall P \in (O,\vec{x})$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

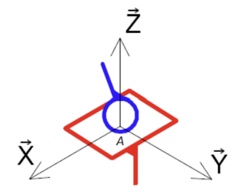
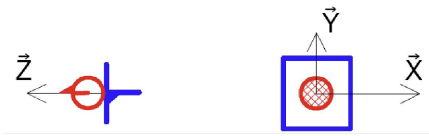
<table>
<tr><td rowspan="2">Liaison sphérique de centre C</td><td colspan="2">$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{\begin{matrix} \omega_x & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{matrix}\right\}_{(C,-,-,-)} = \left\{\begin{matrix} \omega_x\vec{x} + \omega_y\vec{y} + \omega_z\vec{z} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_C$</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="2">Liaison appui plan de normale $\vec{z}$</td><td colspan="2">$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \left\{\begin{matrix} 0 & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{matrix}\right\}_{(P,-,-,\vec{z})} = \left\{\begin{matrix} \omega_z\vec{z} \\ V_x\vec{x} + V_y\vec{y} \end{matrix}\right\}_P$ Pour P dans le plan</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Liaison sphérique à doigt d'axes $\left(C,\vec{y}\right)$ et $\left(C,\vec{z}\right)$	$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(C,-,-,\vec{z})} = \begin{Bmatrix} \omega_y\vec{y}+\omega_z\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C$
	 

Liaison sphère cylindre de centre C et de direction $\vec{x}$	$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & 0 \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(C,\vec{x},-,-)} = \begin{Bmatrix} \omega_x\vec{x}+\omega_y\vec{y}+\omega_z\vec{z} \\ V_x\vec{x} \end{Bmatrix}_C$
	 

Liaison linéaire rectiligne d'axe $\left(O,\vec{x}\right)$ et de normale $\vec{z}$	$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ 0 & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(P,\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \begin{Bmatrix} \omega_x\vec{x}+\omega_z\vec{z} \\ V_x\vec{x}+V_y\vec{y} \end{Bmatrix}_P \quad \forall P \in \left(O,\vec{x}\right)$
	 

Liaison sphère-plan de point de contact A et de normale $\vec{z}$	$\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \omega_x & V_x \\ \omega_y & V_y \\ \omega_z & 0 \end{Bmatrix}_{(A,-,-,\vec{z})} = \begin{Bmatrix} \omega_x\vec{x}+\omega_y\vec{y}+\omega_z\vec{z} \\ V_x\vec{x}+V_y\vec{y} \end{Bmatrix}_A$
	 

Remarque

Pour la **liaison libre**, le torseur cinématique comporte six paramètres indépendants non nuls en tout point P de l'espace.

2.3 Champs des accélérations d'un solide

On sait que : $\vec{V}(B \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{BA} \wedge \vec{\Omega}(S/R)$

En dérivant cette expression dans R, on obtient, après calculs :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(B \in S/R) = \overrightarrow{a}(A \in S/R) + \overrightarrow{BA} \wedge \left[\frac{d\overrightarrow{\Omega}(S/R)}{dt}\right]_R + \overrightarrow{\Omega}(S/R) \wedge \left(\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}(S/R)\right)}$$

Remarque

Remarquons que le champ des accélérations n'est pas équiprojectif : il n'est pas possible de définir un torseur avec.

3 Composition des mouvements

3.1 Compositions des vecteurs vitesses

Soit un repère R_2 de l'espace lié au solide S_2, un repère R_1 lié au solide S_1 et un repère R_0 lié au solide S_0. Soit un point M de S_2 :

A retenir

Composition des vecteurs vitesse

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M \in S_2/S_0) = \overrightarrow{V}(M \in S_2/S_1) + \overrightarrow{V}(M \in S_1/S_0)}$$

On peut généraliser :

A retenir

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M \in S_n/S_0) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{V}(M S_i/S_{i-1})}$$

3.2 Composition des vecteurs taux de rotation

On peut écrire les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{U}(t) \\ \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right]_{R_1} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) \wedge \overrightarrow{U}(t) \\ \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right]_{R_0} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right]_{R_2} + \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_0) \wedge \overrightarrow{U}(t) \end{cases}$$

Des deux premières égalité, on a : $\left[\dfrac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right]_{R_0} - \left[\dfrac{d\overrightarrow{U}(t)}{dt}\right]_{R_2} = \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) \wedge \overrightarrow{U}(t) + \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0) \wedge \overrightarrow{U}(t)$

A retenir

En comparant avec la troisième équation, on déduit :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S_2/S_0) = \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) + \overrightarrow{\Omega}(S_1/S_0)}$$

On peut généraliser :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(S_n/S_0) = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{\Omega}(S_i/S_{i-1})}$$

3.3 Composition des torseurs cinématiques

A retenir

On en déduit la relation torsorielle **AU MÊME POINT** :

$$\boxed{\{\mathcal{V}(S_n/S_0)\} = \sum_{i=1}^{n} \{\mathcal{V}(S_i/S_{i-1})\}}$$

Remarque

La relation de composition des torseurs cinématiques sera principalement utilisée pour le calcul des liaisons équivalentes.

Exemple

On reprend le modèle de la marche humaine traité précédemment.

Question 14 : Donner les torseurs cinématiques aux centres de liaison des mouvement de $2/1$ et de $1/0$.

Solution:

$$\boxed{\{\mathcal{V}(1/0)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}(1/0) \\ \overrightarrow{V}(C \in 1/0) \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C} \qquad \boxed{\{\mathcal{V}(2/1)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}(2/1) \\ \overrightarrow{V}(G \in 2/1) \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}\,\vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G}$$

Question 15 : En déduire le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(H \in 2/0)$. Comparer le résultat obtenu avec la cinématique du point.

Solution:

Composition des vecteurs vitesse : $\overrightarrow{V}(H \in 2/0) = \overrightarrow{V}(H \in 2/1) + \overrightarrow{V}(H \in 1/0)$

Calculs de $\overrightarrow{V}(H \in 2/1)$ et $\overrightarrow{V}(H \in 1/0)$ par la formule de Varignon :

- $\overrightarrow{V}(H \in 2/1) = \overrightarrow{V}(G \in 2/1) + \overrightarrow{HG} \wedge \overrightarrow{\Omega}(2/1) = \vec{0} - b\,\vec{y}_2 \wedge \dot{\beta}\,\vec{z}_0 = -b\dot{\beta}\,\vec{x}_2$;
- $\overrightarrow{V}(H \in 1/0) = \overrightarrow{V}(C \in 1/0) + \overrightarrow{HC} \wedge \overrightarrow{\Omega}(1/0) = \vec{0} + (-b\,\vec{y}_2 - a\,\vec{y}_1) \wedge \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 = -b\dot{\alpha}\,\vec{x}_2 - a\dot{\alpha}\,\vec{x}_1$

Donc $\boxed{\overrightarrow{V}(H \in 2/0) = -a\dot{\alpha}\,\vec{x}_1 - b\left(\dot{\alpha} + \dot{\beta}\right)\vec{x}_2}$.

Cette vitesse est égale à $\overrightarrow{V}(H/R_0)$ ce qui est cohérent car le point H appartient physiquement au solide 2.

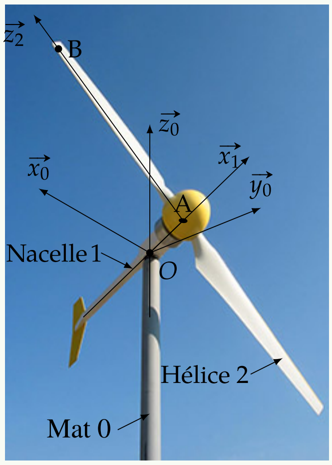
Exemple

Soit l'éolienne définie ci-contre :

La nacelle (1) pivote autour du mat (0) suivant l'axe $(O, \overrightarrow{z_0})$. Cette rotation est définie par l'angle orienté $\theta = (\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1})$.

L'hélice (2) pivote autour de l'axe $(A, \overrightarrow{x_1})$. On note $\beta = (\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$ le paramètre de rotation.

On pose $\overrightarrow{OA} = R.\overrightarrow{x_1}$ et $\overrightarrow{AB} = L.\overrightarrow{z_2}$

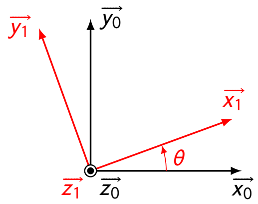


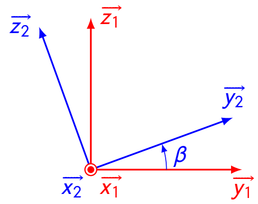
Question 16 : Tracer les figures de changement de base.

Question 17 : Déterminer $\overrightarrow{\Omega_{2/1}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{1/0}}$.

Question 18 : Déterminer l'expression de $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}}$ par dérivation vectorielle, puis par composition de mouvement et distribution de vecteur vitesse (formule de Varignon).

Solution:





Solution:

$$\overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \dot{\beta}.\overrightarrow{x_1} \qquad \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \dot{\theta}.\overrightarrow{z_0}$$

Solution:

Par définition du vecteur vitesse : $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \left.\dfrac{\mathrm{d}L.\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} = \left.\dfrac{\mathrm{d}L.\overrightarrow{z_2}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \wedge L.\overrightarrow{z_2} = \vec{0} + \dot{\beta}.\overrightarrow{x_1} \wedge L.\overrightarrow{z_2}$

Alors : $\boxed{\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = -L.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2}}$

Solution:

Il n'y a pas de composition de mouvement à faire car 2 est déjà en liaison unique avec 1.

Puis on utilise la formule de Varignon. On passe par le point A car il est sur l'axe de rotation de 2/1. Sa vitesse est donc nulle. $\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} = \vec{0} - L.\overrightarrow{z_2} \wedge \dot{\beta}.\overrightarrow{x_1}$ Alors : $\boxed{\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} = -L.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2}}$

Exemple

Question 19 : Toujours pour l'éolienne : Déterminer l'expression de $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}}$ par dérivation vectorielle, et par composition de mouvement et Varignon.

Solution:

Par définition du vecteur vitesse :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} &= \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} = \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} + \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_0} \\
&= \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_1} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OA} + \left.\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_2} + \overrightarrow{\Omega_{2/0}} \wedge \overrightarrow{AB} \\
&= \vec{0} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{0} + \left(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right) \wedge \overrightarrow{AB} \\
&= \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \wedge \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}\right) \wedge \overrightarrow{AB} \\
&= \dot{\theta}.\overrightarrow{z_1} \wedge R.\overrightarrow{x_1} + \left(\dot{\beta}.\overrightarrow{x_2} + \dot{\theta}\,\overrightarrow{z_1}\right) \wedge L.\overrightarrow{z_2} \\
&= R.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_1} - L.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2} + L.\dot{\theta}.\sin(\beta).\overrightarrow{x_2}
\end{aligned}$$

Solution:

On utilise la composition de mouvement : $\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{B\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{B\in 1/0}}$

On utilise les formules de Varignon pour revenir au centre de chaque liaison pivot où la vitesse est nulle :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{B\in 2/1}} &= \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\
&= \vec{0} - L.\overrightarrow{z_2} \wedge \dot{\beta}.\overrightarrow{x_2} \\
&= -L.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{V_{B\in 1/0}} &= \overrightarrow{V_{O\in 1/0}} + \overrightarrow{BO} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\
&= \vec{0} - (L.\overrightarrow{z_2} + R.\overrightarrow{x_1}) \wedge \dot{\theta}.\overrightarrow{z_0} \\
&= L.\dot{\theta}.\sin(\beta).\overrightarrow{x_2} + R.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_1}
\end{aligned}$$

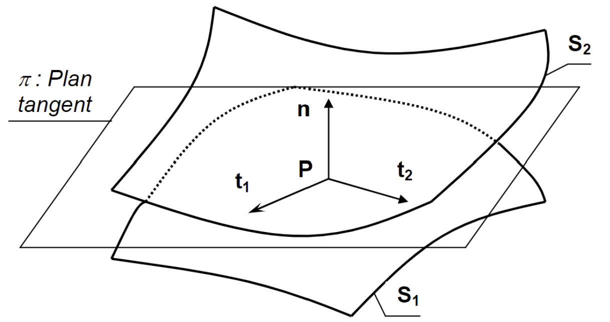
D'où :

$$\overrightarrow{V_{B\in 2/0}} = R.\dot{\theta}.\overrightarrow{y_1} - L.\dot{\beta}.\overrightarrow{y_2} + L.\dot{\theta}.\sin(\beta).\overrightarrow{x_2}$$

Les deux résultats sont donc identiques

Contact ponctuel

En un point P de contact entre deux solides S_1 et S_2, on peut toujours définir un plan tangent π commun aux deux solides et une normale de contact $\overrightarrow{n}$. Le repère $\left(P, \overrightarrow{n}, \overrightarrow{t}_1, \overrightarrow{t}_2\right)$ est un repère local de contact.



En P, on peut écrire le torseur cinématique de S_2 par rapport à S_1.

$$\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) \\ \overrightarrow{V}(P \in S_2/S_1) \end{Bmatrix}_P$$

Si la vitesse de P attaché à S_2 par rapport à S_1 n'est plus dans le plan π, on a soit perte de contact entre les deux solides, soit pénétration de S_2 dans S_1, qui n'est plus alors un solide indéformable.

Définition

- Le vecteur $\overrightarrow{V}(P \in S_2/S_1)$ est appelé **vitesse de glissement** de S_2 par rapport à S_1 en P.

S'il y a maintien de contact au cours du temps, $\overrightarrow{V}(P \in S_2/S_1)$ appartient au plan π : $\boxed{\overrightarrow{V}(P \in S_2/S_1) \cdot \overrightarrow{n} = 0}$

- Le vecteur $\overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1)$ peut être projeté sur $\overrightarrow{n}$ et sur le plan π. On écrit : $\overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) = \overrightarrow{\Omega_n}(S_2/S_1) + \overrightarrow{\Omega_t}(S_2/S_1)$

  $\overrightarrow{\Omega_n}(S_2/S_1) = \Omega_n \overrightarrow{n}$ est la **vitesse de pivotement** de S_2 par rapport à S_1 ;
  $\overrightarrow{\Omega_t}(S_2/S_1) = \Omega_{t_1} \overrightarrow{t}_1 + \Omega_{t_2} \overrightarrow{t}_2$ est la **vitesse de roulement** de S_2 par rapport à S_1.

Le torseur cinématique du mouvement de S_2 par rapport à S_1 peut donc s'écrire : $\{\mathcal{V}(S_2/S_1)\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) = \Omega_n \overrightarrow{n} + \Omega_{t_1} \overrightarrow{t}_1 + \Omega_{t_2} \overrightarrow{t}_2 \\ \overrightarrow{V}(P \in S_2/S_1) = 0\overrightarrow{n} + V_{t_1} \overrightarrow{t}_1 + V_{t_2} \overrightarrow{t}_2 \end{Bmatrix}_P$

A retenir

S'il y a **roulement sans glissement** entre S_2 et S_1 en P, cette condition se traduit par :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(P \in S_2/S_1) = \overrightarrow{0}}$$

Exemple

Une roue **1** de centre O de rayon R est en contact ponctuel au point I avec le sol **0**. Cette roue **1** roule sans glisser avec une vitesse de rotation constante ω autour de l'axe $\left(O, \overrightarrow{z}_0\right)$. on associe le repère $R_1 = (O, \overrightarrow{x}_1, \overrightarrow{y}_1, \overrightarrow{z}_1)$ à la roue **1** et le repère $R_0 = \left(I, \overrightarrow{x}_0, \overrightarrow{y}_0, \overrightarrow{z}_0\right)$ au sol **0**.

Question 20 : En posant la condition de roulement sans glissement au point de contact, calculer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(O \in 1/0)$ en fonction de R et ω.

Solution:
Roulement sans glissement en I : $\vec{V}(I \in 1/0) = \vec{0}$

D'après la formule de Varignon : $\vec{V}(I \in 1/0) = \vec{V}(O \in 1/0) + \overrightarrow{IO} \wedge \vec{\Omega}(1/0) = \vec{V}(O \in 1/0) + R\,\vec{y}_0 \wedge \omega\,\vec{z}_0$

Donc $\vec{V}(O \in 1/0) + R\omega\,\vec{x}_0 = \vec{0} \Longleftrightarrow \boxed{\vec{V}(O \in 1/0) = -R\omega\,\vec{x}_0}$

Question 21 : En déduire la relation entre la norme V de cette vitesse, R et ω.

Solution: On a alors $\left\|\vec{V}(O \in 1/0)\right\| = \boxed{V = R\omega}$